

"EFFEKTE SCHWACHER NEUTRALER STRÖME BEI DER
ELASTISCHEN ELEKTRON-KERNSTREUUNG"

D i s s e r t a t i o n
zur Erlangung des Grades

"D o k t o r d e r N a t u r w i s s e n s c h a f t"

am Fachbereich Physik
der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz

Marion Fischer-Waetzmann
geb. in Stuttgart

Mainz 1979



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552627_0003

"EFFEKTE SCHWACHER NEUTRALER STRÖME BEI DER
ELASTISCHEN ELEKTRON-KERNSTREUUNG"

D i s s e r t a t i o n
zur Erlangung des Grades

"D o k t o r d e r N a t u r w i s s e n s c h a f t"

am Fachbereich Physik
der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz

Marion Fischer-Waetzmann
geb. in Stuttgart

Mainz 1979



1. Referent: Prof. Dr. F. Scheck

2. Referent: Prof. Dr. E.O. Alt

Tag der mündlichen Prüfung: 10.5.79

EFFEKTE SCHWACHER NEUTRALER STRÖME BEI DER ELASTISCHEN ELEKTRON-KERNSTREUUNG

	Seite
I. EINLEITUNG	1
II. ELEKTRON-NUKLEON-WECHSELWIRKUNG	12
III. DER STREUPROZESS	23
III.1. Kinematik	23
III.2. Übergangsamplituden, qualitatives Verhalten der Asymmetrie	25
III.3. Abschätzung der Distorsionseffekte	28
IV. BERECHNUNG DER RECHTS-LINKS-ASYMMETRIE ALS FUNKTION VON KERNMULTIPOLMOMENTEN	33
IV.1. Multipolentwicklung der Kernstromdichten	33
IV.2. Auswahlregeln für elastische Streuung	36
IV.3. Differentieller Wirkungsquerschnitt und Asymmetrie	39
IV.3.1. Elektromagnetischer Wirkungsquerschnitt	39
IV.3.2. Interferenzterm	41
IV.3.2.1. Hadronischer Anteil	41
IV.3.2.2. Multiplikation mit dem leptonischen Anteil	45
IV.3.3. Asymmetrie	49
V. BERECHNUNG DER KERNMULTIPOLMOMENTE	51
V.1. Verwendete Näherungen, Kernmodell	51
V.2. Zurückführung der Kernmultipolmomente auf Einteilchenmatrixelemente	56
V.2.1. Ortsdarstellung	56
V.2.2. Die Kerne ^3H und ^3He	61
V.2.3. Die Kerne ^{41}Ca und ^{209}Bi	65
V.3. Kerne mit Spin 0	67
V.4. Einteilchenmatrixelemente	68
V.4.1. Freie Nukleonmatrixelemente	68
V.4.1.1. Nichtrelativistische Näherung	68
V.4.1.2. Ortsdarstellung	70

	Seite
V.4.2. Multipolmatrixelemente zwischen gebundenen Nukleonzuständen	72
VI. ERGEBNISSE	74
VI.1. Explizite Ausdrücke für die Asymmetrie	74
VI.2. Diskussion der analytischen und numerischen Resultate	79
VI.2.1. Abhängigkeit vom Kernmodell	79
VI.2.2. Möglichkeiten zur experimentellen Untersuchung	82
VI.2.2.1. Nachweis der Existenz	82
VI.2.2.1.1. Größenordnung der Asymmetrie	82
VI.2.2.1.2. Meßbarkeit der Asymmetrie	87
VI.2.2.2. Analyse der Struktur	89
VI.2.2.2.1. Modellunabhängige Bestimmung der schwachen Parameter	89
VI.2.2.2.2. Test verschiedener Eichmodelle	94
VII. ZUSAMMENFASSUNG	99
ANHANG A : NORMIERUNG	105
ANHANG B : FORMELN FÜR DIE VEKTORANTEILE DER REDUZIERTEN EINTEILCHEN-MULTIPOLMATRIXELEMENTE	107
REFERENZEN	109
VERZEICHNIS DER ABBILDUNGEN	115
ABBILDUNGEN	117
LEBENS LAUF	132

I. EINLEITUNG

Einen der Hauptansatzpunkte bei der weiteren Erforschung der schwachen Wechselwirkung bilden schwache leptonische und semileptonische Streuprozesse, bei denen kein Ladungsaustausch zwischen den beteiligten Teilchen stattfindet. Die seit langem bekannten ladungsändernden schwachen Wechselwirkungen lassen sich durch den Austausch von schweren, geladenen Vektorbosonen $W^\pm$ beschreiben, die an Leptonen und Hadronen über sogenannte "geladene" (also an jedem Vertex ladungsändernde) schwache Ströme koppeln ⁽¹⁾.

Behält man diese Beschreibungsweise auch für die neutralen Prozesse bei, so tritt an die Stelle des $W^\pm$ -Austauschs der Austausch von vermutlich ebenfalls schweren, elektrisch neutralen Vektorbosonen (ein oder mehrere Teilchen Z^0_1). Leptonen und Hadronen koppeln dann an solche Vektorbosonen Z^0_1 über schwache "neutrale" (also an jedem Vertex die Ladung erhaltende) Ströme- in enger Analogie zur Kopplung derselben Teilchen an das Photon über den (neutralen) elektromagnetischen Strom. Während die Eigenschaften des elektromagnetischen Stromes wohl bekannt sind, sind die Lorentz- und Isospineigenschaften der schwachen neutralen Ströme erst bruchstückhaft bekannt.

Auch bei der Beschreibung der schwachen Wechselwirkung durch die üblichen Eichtheorien ⁽²⁾ ist die Kenntnis der Struktur der schwachen neutralen Ströme wichtig: Die Existenz solcher Ströme wird von allen realistischen Eichmodellen gefordert, die Aussagen über ihre Struktur sind jedoch von Modell zu Modell sehr unterschiedlich. So wird z.B. eine paritätsverletzende schwache neutrale

Strom-Stromkopplung von den meisten, aber nicht von allen Eichtheorien vorausgesetzt⁽³⁾⁻⁽⁵⁾⁺. Eine Entscheidung zwischen den zur Auswahl stehenden Eichtheorien könnte getroffen werden, sobald die Struktur der schwachen neutralen Ströme bekannt ist.

Eine zentrale Stellung unter diesen Modellen nimmt das von Weinberg und Salam vorgeschlagene Modell^(3a) ein, das auf der minimal erforderlichen Eichgruppenstruktur $SU(2) \times U(1)$ aufgebaut ist und das daher in jeder realistischen Theorie (zumindest als Grenzfall) enthalten sein muß. Dieses Modell, das im folgenden als "Standardmodell" bezeichnet wird und das an verschiedenen Stellen dieser Arbeit als Bezugspunkt herangezogen wird, enthält neben dem masselosen Photon die geladenen schweren Vektormesonen W^+ und W^- , ein neutrales und ebenfalls schweres Vektormeson Z^0 sowie ein geladenes skalares Higgsteilchen. Wenn die Feinstrukturkonstante α und die Fermische Kopplungskonstante G vorgegeben werden, enthält das Modell noch einen freien Parameter (z.B. die relative Kopplungskonstante der $SU(2)$ zur $U(1)$ Eichgruppe), der sich durch einen Mischungswinkel θ_w ausdrücken läßt. Dieser Parameter erscheint in den Ausdrücken für die Massen von $W^\pm$ und von Z^0 (3a)

$$m_W = \left(\frac{\pi \alpha}{k^2 G} \right)^{1/2} \frac{1}{\sin \theta_w}$$

$$\frac{m_W}{m_{Z^0}} = \cos \theta_w \quad (I.1)$$

+) Eine paritätsverletzende Kopplung zwischen Elektronen und Nukleonen wird von den Modellen aus Ref (3a) bis (4) vorhergesagt. Keine paritätsverletzende Kopplung enthalten z.B. die Theorien aus Ref (5).

und in dem von diesem Modell vorhergesagten schwachen neutralen Strom (3a):

$$j_{\mu}^{2*} = j_{\mu}^V - 2 \sin^2 \theta_w j_{\mu}^{(0)} \quad (1.2)$$

wobei j_{μ}^V der elektromagnetische Strom und $j_{\mu}^{(0)}$ der neutrale Isospinpartner der bekannten schwachen geladenen Ströme $j_{\mu}^{(\pm)}$ ist.

Die bis heute zur Verfügung stehenden experimentellen Ergebnisse reichen nicht aus, um die Struktur der schwachen neutralen Ströme modellunabhängig eindeutig festzulegen. Vor allem die Frage nach der Kopplung zwischen geladenen Leptonen und Nukleonen ist noch weitgehend ungeklärt. Die sichersten Informationen stammen bisher von Neutrino-Streuxperimenten an Nukleonen⁽⁶⁾⁻⁽¹⁰⁾. Aus diesen ergab sich übereinstimmend eine V-A-(Lorentz-)Struktur der schwachen neutralen Ströme und die Ergebnisse sind konsistent mit dem Standardmodell⁽¹¹⁾⁻⁽¹³⁾.

Die experimentelle Situation bei schwachen neutralen Prozessen, an denen geladene Leptonen teilnehmen, ist viel unklarer. Reaktionen, an denen Elektronen beteiligt sind, sind für leptonische und semileptonische Fälle getestet worden:

a) Untersuchungen der leptonischen Reaktionen

$$\bar{\nu}_{\mu} e \longrightarrow \bar{\nu}_{\mu} e \quad \text{und} \quad \bar{\nu}_e e \longrightarrow \bar{\nu}_e e \quad : (14)-(16)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Neutrinos masselos und linkshändig, die Antineutrinos masselos und rechthändig und daß die Myon-Neutrinos und Elektronen nicht an den gleichen Vertex koppeln, kann das Auftreten der ersten

Reaktion als Nachweis für schwache neutrale Ströme

gewertet werden. Aus allen beiden Reaktionen (nach Abzug der geladenen Ströme bei der zweiten Reaktion) läßt sich im Prinzip der elektronische schwache neutrale Strom bestimmen. Es wurden bisher jedoch zu wenige Ereignisse registriert, um gesicherte Aussagen zuzulassen. Die wenigen bekannten Ereignisse sind ebenso wie die Experimente vom Typ $\nu_\mu + N \rightarrow \nu_\mu + X$ kompatibel mit dem Standardmodell.

b) Untersuchungen semileptonischer Reaktionen zwischen Elektronen und Nukleonen:

Diese Experimente machen Gebrauch von dem pseudoskalaren Charakter einer durch V-A-Kopplung entstehenden Wechselwirkung. Falls nämlich mindestens einer der beiden neutralen Ströme - entweder der elektronische oder der nukleonische - Vektorcharakter, und falls der andere auch Axialvektorcharakter hat, so entsteht eine pseudoskalare effektive Wechselwirkung, die sich über Interferenz mit der skalaren elektromagnetischen Wechselwirkung im Auftreten von paritätsverletzenden Spin-Impulskorrelationen bemerkbar machen kann. Wegen der geringen Größenordnung der Interferenzamplitude relativ zum rein elektromagnetischen Wirkungsquerschnitt ist die Ausführung dieser Versuche jedoch sehr schwierig. Zwei verschiedene Beispiele sind betrachtet worden:

-- Die schwache Wechselwirkung zwischen Hüllenelektronen und Kern im ^{209}Bi wurde von drei verschiedenen Experimenten untersucht (17)-(19)

-- Das jüngste Experiment zur Untersuchung der schwachen neutralen Wechselwirkung zwischen Elektronen und Nukleonen wurde am Beispiel der inelastischen Elektron-Deuteronstreuung durchgeführt (20).

In Tabelle I sind die Resultate dieser Experimente sowie die auf der Grundlage des Standardmodells (mit $\sin^2 \theta_w = 0,25$) berechneten theoretischen Werte aufgeführt. Spalte zwei zeigt die aus der jeweiligen Messung bestimmbare Kombination K der schwachen neutralen Kopplungskonstanten, die die Struktur der Strom-Stromkopplung festlegen und in Kapitel II (Gleichungen (II.32), (II.32a)) definiert werden.

Tab. I Experimente zur Untersuchung der schwachen neutralen Strom-Stromkopplung vom Typ (ee) (NN)

Exp.	Untersuchter Effekt	K	Ergebnis	
			experimentell	theoretisch
1 ⁽¹⁷⁾	Zirkularpolaris.	$c_{2u}(A+Z)+c_{2d}(A-Z)$	$R_{876}^{\text{exp}} = (0.5 \pm 1.7) \cdot 10^{-8}$	$R^{\text{th}(24)} = -12 \cdot 10^{-8}$
2 ⁽¹⁸⁾	bei atomaren Übergängen in ^{209}Bi	„ „	$R_{648}^{\text{exp}} = (2.7 \pm 4.7) \cdot 10^{-8}$	$R^{\text{th}(24)} = -14 \cdot 10^{-8}$
3 ⁽¹⁹⁾		„ „	$\bar{R}^{\text{exp}} = (1,1 \pm 0,3) \bar{R}^{\text{th}}$	
4 ⁽²⁰⁾	R-L-Asymmetrie im diff. WQ bei inel. e-d-Streuung	$c_{2u}^2 - c_{2d}^2 / 2 + (c_{1u}^2 - c_{1d}^2 / 2)$ $\frac{1-(1-y)^2}{1+(1-y)^2}; y = \frac{E-E'}{E}$	$A^{\text{exp}} = (1,2 \pm 0,3) A^{\text{th}}$	
	(Die Kopplungskonstanten werden weiter unten, Gleichung (II.32a), erklärt.)			

Tabelle I zeigt, daß die Experimente 1 bis 3 die gleiche Kombination der schwachen neutralen Kopplungskonstanten untersuchen; die mit 0 verträglichen Resultate 1 und 2 stehen daher im Widerspruch zum endlichen Ergebnis 3. Ist 3 korrekt, so wird ebenso wie durch 4 das Standardmodell befürwortet. Sind dagegen die Resultate 1 und 2 richtig, so können entweder die Kopplungskonstanten c_{2u} und c_{2d} beide verschwinden, oder sie nehmen endliche Werte an,

für die die Kombination $K = 0$ wird. Die gleichzeitige Gültigkeit von Exp. 1,2 und Exp. 4 kann durch eine Eichtheorie erklärt werden, die einen verschwindenden Wert von $K(\text{Exp.1,2})$ liefert und für $K(\text{Exp.4})$ den mit A^{exp} verträglichen endlichen Wert ergibt (22).

In die theoretische Interpretation der Experimente 1 bis 3 gehen Matrixelemente zwischen Zuständen des atomaren ^{209}Bi ein. Zu ihrer Bestimmung wird die Dichte der Hüllenelektronen am Kernort benötigt, die für schwere Atome experimentell nicht gut bekannt ist. Die Matrixelemente sind in einem Einteilchenmodell für die Hüllenelektronen mit kugelsymmetrischem Potential berechnet worden (21), (23), (24). Die hierbei auftretende Unsicherheit wird bis zu 100 % geschätzt (23). Diese Fehlergrenze würde jedoch nicht ausreichen, die Differenzen zwischen den experimentellen Ergebnissen 1,2 und 3 zu erklären.

Eine weitere Möglichkeit zur Untersuchung der schwachen neutralen Wechselwirkung zwischen geladenen Leptonen und Nukleonen bieten myonische Atome. Ebenso wie bei den oben erläuterten optischen Experimenten am ^{209}Bi -Atom verursachen die schwachen neutralen Ströme hier eine Spin-Impulskorrelation beim γ -Übergang des Myons. Wegen der größeren Kernnähe des Myons in gebundenen Zuständen sind die Effekte der kurzreichweitigen schwachen Wechselwirkung größer als bei elektronischen Atomen, sodaß im Prinzip eine gute Untersuchungsmöglichkeit der schwachen neutralen Ströme gegeben ist. Außerdem ist die Myondichte am Kernort sehr gut bekannt (25), sodaß die Unsicherheiten der theoretischen Ergebnisse gering sind. Es treten jedoch experimentelle Schwierigkeiten

auf, die im Fall der theoretisch häufig betrachteten Übergänge vom $2s_{1/2}$ in den $1s_{1/2}$ -Zustand⁽²⁶⁾ durch die geringe Verzweigungsrate dieser Übergänge zu Übergängen anderer Art verursacht werden. Bessere experimentelle Möglichkeiten bietet die Untersuchung von Übergängen höherer Multipolarität in der Myon-Kaskade^{(27),(28)}, vor allem bei stark deformierten Kernen⁽²⁸⁾. Diese Möglichkeit ist jedoch bisher noch nicht verfolgt worden.

Insgesamt sind sowohl die Frage nach der Existenz einer schwachen neutralen Strom-Stromkopplung zwischen geladenen Leptonen und Hadronen als auch, falls eine solche Kopplung vorausgesetzt wird, die Frage nach ihrer Struktur noch völlig offen. Weitere Experimente sind notwendig, um die Situation zu klären.

Um die Effektivität einer Untersuchung der elastischen Elektron-Kernstreuung abzuschätzen wird in der vorliegenden Arbeit der Beitrag der schwachen neutralen Ströme zu dem Prozeß der Streuung mittelergetischer Elektronen an verschiedenartigen Kernen betrachtet. Die unter Voraussetzung einer V-A-Struktur der neutralen Ströme bei der Streuung longitudinal polarisierter Elektronen auftretende Rechts-Links-Asymmetrie (R-L-Asymmetrie) im differentiellen Wirkungsquerschnitt wird berechnet. Sie wird als Funktion von Eichmodell-unabhängigen Parametern dargestellt, die die Struktur des paritätsverletzenden Anteils der Wechselwirkung festlegen. Es zeigt sich, daß die Messung dieser R-L-Asymmetrie an leichten ebenso wie an schweren Kerntargets mit verschiedenen Spins und Isospins eine vielversprechende Möglichkeit zur Untersuchung der schwachen neutralen Strom-

Stromkopplung bietet. Einige unmittelbar einleuchtende Gründe sollen an dieser Stelle genannt werden:

-- Modellabhängigkeit:

Wie Abschätzungen für Kerne mit Spin 0 und Isospin 0 zeigen ⁽²⁹⁾, ist die R-L-Asymmetrie hier in erster Bornscher Näherung vom verwendeten Kernmodell völlig unabhängig. Es ist plausibel, daß auch für die übrigen Kerne zwar die absoluten Wirkungsquerschnitte Kernmodell-abhängig sind, daß diese Abhängigkeit aber für Quotienten aus Wirkungsquerschnitten, wie die Asymmetrie, nur schwach ausgeprägt ist.

Außerdem ist die für die Berechnung benötigte Dichte des streuenden Elektrons am Kernort sehr genau bekannt, sodaß eine Modellabhängigkeit durch Anpassen an experimentelle Daten weitgehend vermieden werden kann. Die elektromagnetische Übergangsamplitude kann aus experimentellen Daten bestimmt werden. Da die Struktur der schwachen Amplitude, die den Vektoranteil des hadronischen Stroms enthält, erwartungsgemäß ähnlich ist, wird sie dadurch ebenfalls festgelegt und die Annahmen über das Kernmodell gehen nur noch über diejenigen Anteile der schwachen Übergangsamplitude ein, die den hadronischen Axialstrom enthalten ⁽³⁰⁾.

-- Konkurrenzeffekte:

Bei der elastischen Streuung treten in niedrigster Ordnung nur neutrale Ströme auf, die schwachen geladenen Ströme tragen nicht zur Streuamplitude bei.

Die schwache Wechselwirkung zwischen Elektronenhülle und Kern und innerhalb des Kerns verursacht Paritätsmischungen in den Kernzuständen, die ebenfalls zu einer

R-L-Asymmetrie im Streuquerschnitt führen können. Diese Beimischungen entgegengesetzter Parität sind i.a. von der Größenordnung 10^{-5} bis 10^{-6} (31) und können in einigen Fällen, wenn Zustände verschiedener Parität energetisch nahe beieinander liegen, noch größer werden⁽³²⁾. Sie gehen jedoch hauptsächlich über transversale Matrixelemente, deren Vektoranteil bei der elastischen Streuung verschwindet, in die Übergangsamplitude ein^{(32), (72)} und können daher gegenüber den kohärenten longitudinalen Beiträgen vernachlässigt werden.

Durch Beobachtung eines paritätsverletzenden Effektes bei der elastischen Elektron-Kernstreuung wäre somit ein direkter Nachweis schwacher neutraler Ströme erbracht.

-- Größenordnung:

Die Auswirkungen der schwachen neutralen Ströme bei der Streuung mittlereenergetischer Elektronen am Proton liegen nach im Standardmodell durchgeführten Rechnungen⁽³³⁾ an der Grenze des meßbaren Bereichs. Die erwartete Asymmetrie für die Streuung am Neutron ist i.a. um einen Faktor 2 größer als für das Proton. Diese Tatsache spricht für die Verwendung neutronenreicher Kerne als Target, sodaß die Untersuchung von Kernen mit nicht verschwindendem Isospin nützlich ist. Bei Kernen mit höheren Spins tragen auch höhere Partialwellen zur Übergangsamplitude bei, die den Effekt gegenüber der bei der Streuung am Nukleon oder an Kernen mit Spin 0 auftretenden Asymmetrie ebenfalls vergrößern können.

Die longitudinalen Anteile tragen kohärent zur elastischen Streuamplitude bei. Der elektromagnetische Wirkungsquerschnitt ist proportional zu Z^2 , daher ist seine Größen-

ordnung für Kerne mit höherer Ordnungszahl günstiger⁺⁾ als für leichte Kerne.

Auf Grund dieser Tatsachen wird die erwartete Asymmetrie deutlich in den meßbaren Bereich gerückt, die experimentellen Schwierigkeiten werden kleiner, sodaß zunächst eine sicherere Aussage über die Existenz der untersuchten Paritätsverletzung ermöglicht wird.

-- Untersuchung der Struktur:

Kerntargets mit verschiedenen Spins und Isospins stehen zur Auswahl. Mit Hilfe inelastischer Streuung können auf Grund spezieller Auswahlregeln neutrale Stromterme mit bestimmten Lorentz- und Isospineigenschaften isoliert werden. Dies setzt jedoch die experimentelle Trennung der verschiedenen inelastischen Kanäle voraus. In dieser Arbeit werden Formeln für die Übergangsamplituden entwickelt, die für die inelastische Streuung ebenso wie für die elastische gelten; die konkreten Berechnungen werden jedoch für den elastischen Fall durchgeführt.

Bei der elastischen Streuung an Kernen hängen i.a. die paritätsverletzenden Effekte von einer komplizierteren Kombination der schwachen neutralen Kopplungskonstanten ab als bei der Streuung an einzelnen Nukleon. Es zeigt sich jedoch, daß es mindestens ebenso interessante Möglichkeiten zur Untersuchung der Struktur der schwachen neutralen Ströme gibt wie bei der Elektron-Nukleonstreuung.

So wird z.B. in bestimmten Fällen die gleiche Kombination

⁺⁾ Dies hat den experimentellen Vorteil, daß bei gleicher Meßzeit der statistische Fehler der Messung stark verringert wird (34) .

der Kopplungskonstanten gemessen wie bei den Experimenten 1 bis 3 aus Tabelle I, sodaß sich die Möglichkeit zur Überprüfung der widersprüchlichen experimentellen Resultate ergibt. Bei der Streuung an ^{209}Bi ist ein direkter Vergleich mit diesen Versuchen möglich⁺). Außerdem wird bei der Kernstreuung die Entscheidung zwischen bestimmten Eichtheorien gegenüber der Streuung am Nukleon erleichtert.

Die konkrete Berechnung der Asymmetrie wird im Rahmen eines einfachen Kernmodells durchgeführt, der Streuprozess wird in Stoßnäherung behandelt ⁺⁺). Die Kerne mit Spin ungleich 0 ^3H , ^3He , ^{41}Ca , ^{209}Bi und die Spin-0-Kerne ^{12}C , ^{40}Ca , ^{208}Pb werden untersucht.

Ein entsprechendes Experiment befindet sich zur Zeit in Mainz durch eine Zusammenarbeit der Institute für Physik und Kernphysik im Aufbau ⁽³⁴⁾ .

+) Hierbei kommt der unter dem ersten Punkt in dieser Aufzählung angesprochene Vorteil des Streuexperiments gegenüber den optischen Versuchen zum Tragen, daß nämlich die Dichte des streuenden Elektrons am Kern-, ort im Gegensatz zur Dichte der äußeren Hüllenelektronen im Kern eines großen Atoms sehr genau bekannt ist.

++) Sämtliche verwendeten Modellannahmen und Näherungen, die den Kern und den Streuprozess betreffen, sind in Abschnitt V.1 zusammengefaßt.

II. ELEKTRON-NUKLEON-WECHSELWIRKUNG

Aus der Lagrangefunktion für die elektromagnetische Wechselwirkung

$$\mathcal{L}^{\gamma} = c (j_{\mu}^{\gamma} + j_{\mu}^{\gamma}) A^{\mu} \quad (\text{II.1})$$

mit e = elektromagnetische Kopplungskonstante

$j_{\mu}^{\gamma}, j_{\mu}^{\gamma}$ = leptonischer bzw. hadronischer elektromagnetischer Strom

A_{μ} = Photonenfeld

erhält man in niedrigster Ordnung der Kopplungskonstanten für die Elektron-Nukleonstreuung (35)

$$H^{\gamma} = \frac{e^2}{(2\pi)^2} j_{\mu}^{\gamma} \frac{1}{q^2} j^{\mu\gamma} \quad (\text{II.2})$$

wobei q der Impulsübertrag auf das Nukleon ist. Die elektromagnetischen Stromdichten sind Lorentzvektoren.

Für den leptonischen Strom gilt +)

$$j_{\mu}^{\gamma} = j_{\mu}^{\gamma} = \bar{e} \gamma_{\mu} e \quad (\text{II.3})$$

In einer Basis von Eigenzuständen zum Impuls ist sein Matrixelement zwischen freien Elektronenzuständen mit den Impulsen p', p und den Spineinstellungen α', α gegeben durch +)

$$\langle e'(p', \alpha') | j_{\mu}^{\gamma} | e(p, \alpha) \rangle = \bar{u}(p', \alpha') \gamma_{\mu} u(p, \alpha) \quad (\text{II.4})$$

Unter Verwendung von Lorentzinvarianz erhält man in der gleichen Basis für die freien Nukleonmatrixelemente (35)

+) Für die Diracmatrizen und -spinoren werden, wenn nicht gesondert angegeben, Notation und Konventionen aus

Ref. (35) genommen.

$$\langle N'(k', \bar{v}', \xi) | \hat{T}_\mu^\nu | N(k, \bar{v}, \xi) \rangle = \bar{u}(k', \bar{v}') \gamma^+(\xi) \left[\hat{T}_1^\nu + \right. \\ \left. + \hat{T}_2^\nu \bar{v}_\mu \gamma^\mu \right] \gamma^-(\xi) u(k, \bar{v}) \quad (\text{II.5})$$

Dabei bezeichnen k' , $\bar{v}'$ bzw. k , $\bar{v}$ Impuls und Spineinstellung des Nukleons vor bzw. nach der Streuung. ξ ist die 3-Komponente des Isospins, die wegen des neutralen Charakters des Stromes vor und nach der Streuung gleich ist. Gleichung (II.5) definiert die elektromagnetischen Nukleonformfaktoren $\hat{T}_1^\nu$, $\hat{T}_2^\nu$, die Operatoren im Isospinraum des Nukleons sind (dies deutet die Kennzeichnung $\hat{}$ an). Sie haben die Isospinstruktur

$$\hat{T}_x = \frac{1}{2} (T_x^s \mathbb{1} + T_x^v \tau_3) \quad , \quad x=1,2 \quad (\text{II.6})$$

wobei T_x^s bzw. T_x^v den isoskalaren bzw. den isovektoriellen Anteil des Formfaktors $\hat{T}_x$ darstellen. Bei Gültigkeit von Zeitumkehrinvarianz und unter Ausnutzung der Forderung, daß $\hat{T}_\mu^\nu$ hermitisch ist, werden sie durch reelle Funktionen von q^2 dargestellt⁽³⁵⁾. Die q^2 -Abhängigkeit der Nukleonformfaktoren wird durch die übliche Beziehung⁽³⁶⁾

$$F(q^2) \equiv \frac{T_1^{s/v}(q^2)}{T_1^{s/v}(0)} = \frac{T_2^{s/v}(q^2)}{T_2^{s/v}(0)} = \left(1 - \frac{q^2}{0,716 \text{ GeV}^2} \right)^{-2} \quad (\text{II.7})$$

beschrieben.

Für die Werte der Formfaktoren an der Stelle $q^2 = 0$ gilt

$$T_1^{s/v}(0) = 1 \quad T_1^{v/v}(0) = 1 \\ T_2^{s/v}(0) = \frac{\mu_p + \mu_n}{2m_N} \quad T_2^{v/v}(0) = \frac{\mu_p - \mu_n}{2m_N} \quad (\text{II.8})$$

wobei m_N die Nukleonenmasse und $\mu_p = 1,79$ bzw. $\mu_n = -1,91$ die anomalen magnetischen Momente von Proton und Neutron sind.

Die Werte der Formfaktoren von Proton und Neutron an der Stelle $q^2 = 0$ sind gegeben durch die Isospinmatrixelemente

$$F_{\pi}(i) = \eta(g_i) \hat{F}_{\pi}(0) \eta(g_i) \quad , \quad i = p, n \quad (II.9)$$

Es folgt mit Hilfe von (II.6) und den expliziten Werten (II.8)

$$\begin{aligned} F_1^{\gamma}\{p\}(0) &= \frac{1}{2} [F_1^{S\gamma}\{+\} F_1^{V\gamma}\{0\}] = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ F_2^{\gamma}\{p\}(0) &= \frac{1}{2} [F_2^{S\gamma}\{+\} F_2^{V\gamma}\{0\}] = \frac{\begin{Bmatrix} \mu_{(p)}^{\gamma} \\ \mu_{(n)}^{\gamma} \end{Bmatrix}}{2 m_N} \end{aligned} \quad (II.10)$$

In Abschnitt V.4 werden auch die Werte der Sachsformfaktoren $G_H^{\gamma}\{p\}$ an der Stelle $q^2 = 0$ benötigt. Ihre Isospinmatrixelemente ergeben die vollständigen magnetischen Momente der Nukleonen:

$$G_H^{\gamma}\{p\}(0) \equiv [F_1^{\gamma}\{p\}(0) + 2 m_N F_2^{\gamma}\{p\}(0)] = \begin{Bmatrix} 1 + \mu_{(p)}^{\gamma} \\ \mu_{(n)}^{\gamma} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \mu_{(p)}^{\delta} \\ \mu_{(n)}^{\delta} \end{Bmatrix} \quad (II.11)$$

Mit den Matrixelementen (II.4) und (II.5) folgt für die elektromagnetische Übergangsamplitude

$$\begin{aligned} \langle e', N' | H^{\gamma} | e, N \rangle &= \frac{e^2}{(2\pi)^2 q^2} \bar{u}(p', x') \gamma_{\mu} u(p, x) \cdot \\ &\cdot \bar{u}(l', b') \gamma_{\nu} [\hat{F}_1^{\gamma} \gamma^{\mu} + \hat{F}_2^{\gamma} \not{b}^{\mu} \not{q}^{\nu}] \eta(g) u(l, b) \end{aligned} \quad (II.12)$$

In Analogie zu (II.1), (II.2) wird nun die semileptonische schwache Wechselwirkung durch den Austausch zunächst eines massiven neutralen intermediären Vektorbosons (IVB) Z^0 dargestellt.

Aus der Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}^{Z^0} = g (j_\mu^{Z^0} + j_\mu^{Z^0}) Z^{\mu 0} \quad (\text{II.13})$$

mit g = schwache Kopplungskonstante

$j_\mu^{Z^0}, j_\mu^{Z^0}$ = leptonischer bzw. hadronischer schwacher neutraler Strom.

$Z^{\mu 0}$ = Feld des Z^0

erhält man in niedrigster Ordnung von g (37):

$$H^{Z^0} = \frac{g^2}{(2\pi)^2} j_\mu^{Z^0} \frac{-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{m_{Z^0}^2}}{q^2 - m_{Z^0}^2} j_\nu^{Z^0} \quad (\text{II.14})$$

Dabei ist der exakte Propagator des massiven Z^0 berücksichtigt.

Für elastische Streuung verschwindet der Term proportional zu $q^\mu q^\nu$. Wegen $m_{Z^0} \approx 80$ GeV kann für die hier betrachteten Impulsüberträge ($q^2 \leq 360$ MeV) im exakten Propagator q^2 gegen $m_{Z^0}^2$ vernachlässigt werden; der dabei verursachte Fehler ist kleiner als 0,1 %. Damit ergibt sich für die schwache Wechselwirkung eine effektive neutrale Strom-Stromkopplung der Form

$$H^{Z^0} = \frac{G}{12 (2\pi)^2} j_\mu^{Z^0} j_\mu^{Z^0} \quad (\text{II.15})$$

mit $\frac{G}{12} = \frac{g^2}{m_{Z^0}^2}$

Falls mehr als ein neutrales IVB beiträgt, verallgemeinern sich diese Ausdrücke entsprechend. Wie unten gezeigt wird, gibt es auch dann eine effektive pseudoskalare Wechselwirkung, solange alle Massen m_{Z^0} groß gegenüber dem Impulsübertrag sind. Zunächst wird der Fall eines einzigen Z^0 betrachtet. Für die schwachen neutralen Stromdichten wird

die übliche V-A-(Lorentz-) Struktur angenommen
(Ableitungskopplungen werden ausgeschlossen):

$$\begin{aligned} j_{\mu}^{2^0} &= j_{\mu}^V + j_{\mu}^A \\ j_{\mu}^{2^0} &= j_{\mu}^{2^0} + j_{\mu}^{2^0} \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Die vektoriellen Anteile können analog zu den elektromagnetischen Strömen behandelt werden. Man erhält für die leptonische Stromdichte (s. (II.3) und (II.4))

$$j_{\mu}^{2^0} = c_{ve} \bar{e} \gamma_{\mu} e + c_{Ae} \bar{e} \gamma_{\mu} \gamma_5 e \quad (\text{II.17})$$

$$\langle e'(p', \alpha') | j_{\mu}^{2^0} | e(p, \alpha) \rangle = \bar{u}(p', \alpha') [c_{ve} \gamma_{\mu} + c_{Ae} \gamma_{\mu} \gamma_5] u(p, \alpha) \quad (\text{II.18})$$

Die fundamentalen Elektron-Kopplungskonstanten c_{ve} und c_{Ae} geben das Mischungsverhältnis von Vektor- und Axialstrom an. Analog zu (II.5) werden schwache neutrale Nukleonformfaktoren definiert. Bei Ausschluß von Strömen der 2. Klasse und unter Verwendung von Lorentzinvarianz ergibt sich folgende Form der freien Nukleonmatrixelemente (10):

$$\begin{aligned} \langle N'(q', \bar{b}', S') | j_{\mu}^{2^0} | N(q, \bar{b}, S) \rangle &= \bar{u}(q', \bar{b}') \gamma^{\mu}(S) [\hat{F}_1^{2^0} \gamma_{\mu} + \hat{F}_2^{2^0} \\ &\quad - \hat{F}_A^{2^0} \gamma_{\mu} \gamma_5 - \hat{F}_V^{2^0} q_{\mu} \gamma_5] \gamma^{\mu}(S) u(q, \bar{b}) \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

Die q^2 -Abhängigkeit der schwachen neutralen Formfaktoren wird unter Verwendung von Zeitumkehrinvarianz und Hermitizität von $j_{\mu}^{2^0}$ ebenso wie die der elektromagnetischen Formfaktoren durch reelle Funktionen von q^2 beschrieben. Sonst sind die Formfaktoren jedoch zunächst unbekannt.

Die zu (II.6) analoge Isospinstruktur

$$\hat{F}_x^{z^0} = \frac{1}{2} (F_x^{s^0} \mathbb{1} + F_x^{v^0} \tau_3) \quad , \quad x = 1, 2, A, P \quad (\text{II.20})$$

wird angenommen +). Im Standardmodell ist $\hat{y}_\mu^{z^0}$ eine Linearkombination aus $\hat{y}_\mu^{\gamma}$ und $\hat{y}_\mu^{(c)}$ (s.(I.2)). Zusammen mit der CVC-Hypothese sind dann die (Lorentz)-Vektorformfaktoren von $\hat{y}_\mu^{z^0}$ durch diejenigen von $\hat{y}_\mu^{\gamma}$ festgelegt. Die (Lorentz)-Axialformfaktoren von $\hat{y}_\mu^{z^0}$ ergeben sich aus denjenigen des Axialanteils von $\hat{y}_\mu^{(\pm)}$. Es ist plausibel, daß auch in einer allgemeineren Situation die q^2 -Abhängigkeit der schwachen neutralen Formfaktoren dieselbe ist wie diejenige der entsprechenden Formfaktoren von $\hat{y}_\mu^{\gamma}$ und $\hat{y}_\mu^{(\pm)}$. Dies sei im Folgenden angenommen ++); die Werte der schwachen neutralen Formfaktoren an der Stelle $q^2 = 0$ werden jedoch ebenso wie die fundamentalen Kopplungskonstanten aus (II.17) offen gelassen. Die verschiedenen Eichmodelle ergeben sich bei bestimmter Wahl dieser Werte als Spezialfälle. Im Standardmodell gilt z.B. für die (Lorentz)-Vektorformfaktoren von Proton und Neutron +++)) an der Stelle $q^2 = 0$

+) Diese Annahme ergibt sich bei Verwendung des Quarkmodells als Folgerung.

++) Wesentlich an dieser Annahme ist nur, daß die q^2 -Variation der Nukleonformfaktoren schwach ist. Die q^2 -Abhängigkeit der Axialformfaktoren von $\hat{y}_\mu^{(\pm)}$ wird durch dieselbe Funktion (II.7) beschrieben wie die der Vektorformfaktoren ⁽³⁶⁾.

+++)) Die schwachen neutralen Formfaktoren der einzelnen Nukleonen sind durch die zu (II.9) analogen Isospinmatrixelemente gegeben und es ist wieder $\hat{F}_x^{z^0} \{ \frac{1}{2} \} = \frac{1}{2} [\hat{F}_x^{s^0} \{ \frac{1}{2} \} + \hat{F}_x^{v^0} \{ \frac{1}{2} \}]$,

$$\hat{F}_x = \hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{F}_A, \hat{F}_P, G_v, G_A.$$

$$T_1^{2^0} \{P\}(0) = \left\{ \frac{1}{2} - 2 \sin^2 \theta_w \right\}$$

$$T_2^{2^0} \{P\}(0) = \frac{1}{2\mu_N} \left\{ \frac{1}{2} (\mu_p - \mu_n) - 2\mu_p \sin^2 \theta_w \right\} \quad (\text{II.21})$$

Die den Sachsformfaktoren $G_N \{E\}$ entsprechenden schwachen neutralen Nukleonformfaktoren $G_N^{2^0} \{E\}$ ergeben analog zu (II.11) die schwachen neutralen vektoriellen bzw. axialen "magnetischen Momente"; sie lauten im Standardmodell

$$G_N^{2^0} \{P\}(0) = \left\{ \frac{1}{2} (1 + \mu_p) - \mu_n \right\} - 2(1 + \mu_p) \sin^2 \theta_w \Bigg\} \equiv \mu_N^{2^0} \{P\} \quad (\text{II.22})$$

$$G_A^{2^0} \{P\}(0) = \frac{g_A(0)}{2} \equiv \mu_A^{2^0} \{P\} \quad (\text{II.23})$$

Dabei ist g_A der entsprechende Axialformfaktor des schwachen geladenen Stromes mit dem Wert an der Stelle $q^2 = 0$ $g_A(0) = 1,2$ (38).

Auf Grund der V-A-Struktur der Ströme tritt im schwachen neutralen Anteil der Wechselwirkung der pseudoskalare Term

$$H_{P.S.}^{2^0} = \frac{G}{f^2 (2\pi)^2} (j_\mu^{2^0} \gamma^\mu \gamma_5 + j_\mu^{2^0} \gamma^\mu \gamma_5) \quad (\text{II.24})$$

auf, der bei Interferenz mit dem skalaren elektromagnetischen Anteil zu paritätsverletzenden Effekten führt. Es entsteht auch ein skalarer Term

$$H_S^{2^0} = \frac{G}{f^2 (2\pi)^2} (j_\mu^{2^0} \gamma^\mu + j_\mu^{2^0} \gamma^\mu) \quad (\text{II.25})$$

der jedoch kaum nachweisbar ist.

Mit Hilfe der Strommatrixelemente (II.18), (II.19) erhält man die folgende Darstellung der pseudoskalaren schwachen neutralen Übergangsamplitude:

$$\langle e', N' | H_{P.S.}^{2^0} | e, N \rangle = \frac{G}{f^2 (2\pi)^2} \left\{ \bar{u}(p', x') \gamma_\mu \gamma_5 u(p, x) \bar{u}(k', b') \gamma^\mu \gamma_5 u(k, b) + \hat{C}_{12} \gamma^\mu \gamma_5 \gamma_5 u(k, b) + u(p', x') \gamma_\mu \gamma_5 u(p, x) \bar{u}(k', b') \gamma^\mu \gamma_5 u(k, b) \right. \\ \left. + [\hat{C}_{21} \gamma^\mu + \hat{C}_{22} \gamma^\mu \gamma_5] \gamma_5 u(k, b) \right\} \quad (\text{II.26})$$

wobei

$$\hat{C}_{ij} \equiv \frac{1}{2} (C_{ij}^S \underline{1} + C_{ij}^V \underline{\tau}_3) \quad ; \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{II.26a})$$

Die isoskalaren bzw. isovektoriellen Anteile der effektiven Kopplungskonstanten $C_{ij}^{S/V}$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} C_{11}^{S/V} &= -C_{Ve} \bar{F}_A^{2^{\circ S/V}}(0) & C_{12}^{S/V} &= -C_{Ve} \bar{F}_P^{2^{\circ S/V}}(0) \\ C_{21}^{S/V} &= C_{Ae} \bar{F}_1^{2^{\circ S/V}}(0) & C_{22}^{S/V} &= C_{Ae} \bar{F}_2^{2^{\circ S/V}}(0) \end{aligned} \quad (\text{II.26b})$$

(II.26b) stellt einen Satz von Parametern dar, durch den der pseudoskalare Anteil der Wechselwirkung beschrieben werden kann. Diese Darstellung der pseudoskalaren Wechselwirkung mit Hilfe der fundamentalen Elektronen-Kopplungskonstanten und der Nukleonformfaktoren ist Eichmodell-unabhängig. Die Annahmen, die bei der Ableitung von (II.26) verwendet wurden, sind sehr allgemeiner Natur, nämlich Lorentz- und Zeitumkehrinvarianz, Hermitizität und V-A-Struktur der schwachen neutralen Ströme. Außerdem wurde die Beschreibung der q^2 -Abhängigkeit der Nukleonformfaktoren durch (II.7) benutzt. Durch Vergleich der mit Hilfe der Darstellung (II.26) berechneten paritätsverletzenden Effekte mit entsprechenden experimentellen Daten können diese Parameter bestimmt werden. Das Ziel dieser Arbeit ist es, die bei der Elektron-Kernstreuung auftretende Asymmetrie als Funktion des Parametersatzes (II.26b) zu berechnen.

Es wird nun gezeigt, daß sich an der Struktur des pseudoskalaren Terms (II.26) nichts ändert, wenn mehrere $2^{\circ}\underline{1}$ zur schwachen Wechselwirkung beitragen:

Falls $m_{\pi}^2 \gg q^2 \neq 0$, gilt

$$H^{2^0} = \sum_i \frac{g_i^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{\omega_i^{2^0}} \gamma_\mu^{2^0} \gamma_\mu^{2^0} \quad (II.27)$$

und

$$\langle e' | \gamma_\mu^{2^0} | e \rangle = \bar{u}(p', x') [c_{ve}^i \gamma_\mu + c_{\nu e}^i \gamma_\mu \gamma_5] u(p, x) \quad (II.28)$$

$$\begin{aligned} \langle N' | \gamma_\mu^{2^0} | N \rangle = & \bar{u}(b', b') \gamma_\mu^{2^0} \gamma_\mu^{2^0} [\hat{F}_1^{2^0} \gamma_\mu + \hat{F}_2^{2^0} \gamma_\mu \gamma_5 - \\ & - \hat{F}_3^{2^0} \gamma_\mu \gamma_5 - \hat{F}_4^{2^0} \gamma_\mu \gamma_5] \gamma_\mu^{2^0} u(b, b) \end{aligned} \quad (II.29)$$

und es folgt für die pseudoskalare Übergangsamplitude ein Ausdruck der Form (II.26)

$$\begin{aligned} \langle e' | N' | H_{p.v.} | e, N \rangle = & \frac{G}{\sqrt{2} (2\pi)^2} \left\{ \bar{u}(p', x') \gamma_\mu u(p, x) \bar{u}(b', b') \gamma_\mu^{2^0} \gamma_\mu^{2^0} \right. \\ & \cdot [\hat{C}_{11}^i \gamma_\mu \gamma_5 + \hat{C}_{12}^i \gamma_\mu \gamma_5] \gamma_\mu^{2^0} u(b, b) + \bar{u}(p', x') \gamma_\mu \gamma_5 u(p, x) \bar{u}(b', b') \gamma_\mu^{2^0} \gamma_\mu^{2^0} \\ & \cdot [\hat{C}_{21}^i \gamma_\mu + \hat{C}_{22}^i \gamma_\mu \gamma_5] \gamma_\mu^{2^0} u(b, b) \end{aligned} \quad (II.30)$$

wobei die effektiven Kopplungskonstanten nun definiert sind durch

$$\begin{aligned} c_{11}^{1S/V} &= - \sum_i K_i^2 c_{ve}^i \hat{F}_A^{SN 2^0 i} \\ c_{12}^{1S/V} &= - \sum_i K_i^2 c_{ve}^i \hat{F}_P^{SN 2^0 i} \\ c_{21}^{1S/V} &= \sum_i K_i^2 c_{\nu e}^i \hat{F}_1^{SN 2^0 i} \\ c_{22}^{1S/V} &= \sum_i K_i^2 c_{\nu e}^i \hat{F}_2^{SN 2^0 i} \end{aligned} \quad (II.30a)$$

$$\text{mit } K_i^2 = \left(\frac{g_i \omega_i^{2^0}}{g \omega_i^{2^0 i}} \right)^2 = \frac{g_i^2 |f_i^2|}{\omega_i^{2^0 i} G}$$

Zum Abschluß dieses Kapitels wird noch die Darstellung der pseudoskalaren Wechselwirkung betrachtet, die sich ergibt, wenn das Quarkmodell für die Nukleonen verwendet wird.

Der Zusammenhang mit der obigen Beschreibung wird hergestellt. Es wird wieder angenommen, daß nur ein Z^0 zur schwachen Wechselwirkung beiträgt. Eine Verallgemeinerung auf mehrere Z^0 läßt sich analog zu (II.27) bis (II.30a) durchführen. Die hadronische schwache neutrale Stromdichte ist im Quarkmodell gegeben durch

$$j_{\mu}^{Z^0} = \sum_q (c_{Vq} \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi + c_{Aq} \bar{\psi} \gamma_{\mu} \gamma_5 \psi) \quad (\text{II.31})$$

Summiert wird für die Nukleonen nur über die Quarkfelder $q = u, d$, da die Beiträge der s- und c-Quarks zum Nukleon vernachlässigt werden können. Die fundamentalen Kopplungskonstanten c_{Vq} , c_{Aq} geben analog zu den leptonischen Kopplungskonstanten aus (II.17) das Mischungsverhältnis der vektoriellen und axialen Quarkströme an. Sie sind ebenso wie die Nukleonformfaktoren experimentell zunächst unbekannt, werden aber von Eichtheorien eindeutig festgelegt. Mit (II.31) und (II.17) ergibt sich für die pseudoskalare Wechselwirkung (II.24)

$$H_{p.s.}^{Z^0} = \frac{G}{[2^7 (2\pi)^2]} \sum_q (c_{1q} \bar{e} \gamma_{\mu} e \bar{q} \gamma^{\mu} \gamma_5 q + c_{2q} \bar{e} \gamma_{\mu} \gamma_5 e \bar{q} \gamma^{\mu} q) \quad (\text{II.32})$$

mit den effektiven Kopplungskonstanten

$$c_{1q} \equiv c_{Ve} c_{Aq} ; \quad c_{2q} \equiv c_{Ae} c_{Vq} \quad (\text{II.32a})$$

(II.32a) stellt einen zu (II.26b) alternativen Parametersatz zur Beschreibung von $H_{p.s.}^{Z^0}$ dar. Korrelationen zwischen den schwachen neutralen Nukleonformfaktoren, den fundamentalen Kopplungskonstanten c_{Ve} , c_{Ae} , c_{Vq} , c_{Aq} und den bekannten

elektromagnetischen und schwachen geladenen Nukleonenformfaktoren sind in Ref.(39) und Ref.(40) abgeleitet. Daraus ergeben sich die folgenden Beziehungen zwischen den beiden Parametersätzen (II.26b) und (II.32a):

$$\begin{aligned}
 c_{11}^S &= \frac{3}{5} c_{ve} (c_{Au} + c_{Ad}) g_{CA}(0) = \frac{3}{5} (c_{Au} + c_{Ad}) g_{CA}(0) \\
 c_{11}^V &= c_{ve} (c_{Au} - c_{Ad}) g_{CA}(0) = (c_{Au} - c_{Ad}) g_{CA}(0) \\
 c_{12}^S &= \frac{3}{5} c_{ve} (c_{Au} + c_{Ad}) h_{CA}(0) = \frac{3}{5} (c_{Au} + c_{Ad}) h_{CA}(0) \\
 c_{12}^V &= c_{ve} (c_{Au} - c_{Ad}) h_{CA}(0) = (c_{Au} - c_{Ad}) h_{CA}(0) \\
 c_{21}^S &= \frac{3}{2} c_{Ae} (c_{Vu} + c_{Vd}) \bar{F}_1^{S^R}(0) = \frac{3}{2} (c_{2u} + c_{2d}) \bar{F}_1^{S^R}(0) \\
 c_{21}^V &= \frac{1}{2} c_{Ae} (c_{Vu} - c_{Vd}) \bar{F}_1^{V^R}(0) = \frac{1}{2} (c_{2u} - c_{2d}) \bar{F}_1^{V^R}(0) \\
 c_{22}^S &= -\frac{3}{2} c_{Ae} (c_{Vu} + c_{Vd}) \bar{F}_2^{S^R}(0) = -\frac{3}{2} (c_{2u} + c_{2d}) \bar{F}_2^{S^R}(0) \\
 c_{22}^V &= -\frac{1}{2} c_{Ae} (c_{Vu} - c_{Vd}) \bar{F}_2^{V^R}(0) = -\frac{1}{2} (c_{2u} - c_{2d}) \bar{F}_2^{V^R}(0)
 \end{aligned}
 \tag{II.33}$$

Dabei sind $g_{CA}(q^2)$ und $h_{CA}(q^2)$ die Axialformfaktoren des schwachen geladenen Stromes.

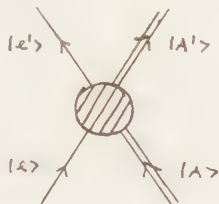
Als Beispiel sollen die Korrelationen (II.33) für das Standardmodell angegeben werden. Da der axiale hadronische Strom hier ein reiner Isovektor ist, verschwinden die Isoskalaren Parameter c_{11}^S und c_{12}^S und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 c_{11}^S &= 0 \\
 c_{11}^V &= \left(-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W\right) g_{CA}(0) \\
 c_{12}^S &= 0 \\
 c_{12}^V &= \left(-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W\right) h_{CA}(0) \\
 c_{21}^S &= -\frac{1}{2} \sin^2 \theta_W \bar{F}_1^{S^R}(0) \\
 c_{21}^V &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \sin^2 \theta_W\right) \bar{F}_1^{V^R}(0) \\
 c_{22}^S &= \frac{1}{2} \sin^2 \theta_W \bar{F}_2^{S^R}(0) \\
 c_{22}^V &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \sin^2 \theta_W\right) \bar{F}_2^{V^R}(0)
 \end{aligned}
 \tag{II.33a}$$

III. DER STREUPROZESS

III.1. Kinetik

Betrachtet wird die Streuung eines Elektrons mit dem Viererimpuls p und der Spineinstellung κ an einem Kern mit dem Schwerpunktsimpuls P .



Die Massenzahl des Kerns sei A , die Zahl der Protonen Z , die der Neutronen N . Der Kernzustand $|A\rangle$ wird außerdem bestimmt durch die Spinquantenzahlen I, M_I und einen Satz von inneren Quantenzahlen "n". Nach der Streuung hat das Elektron den Impuls p' und die Spinrichtung κ' , der Kern befindet sich im Zustand $|A'\rangle$ mit dem Endimpuls P' . Energie-Impulserhaltung fordert:

$$p_{\mu}' + P_{\mu}' = p_{\mu} + P_{\mu} \quad (\text{III.1})$$

Wir betrachten im folgenden elastische Streuung, d.h. die "Kernquantenzahlen" sind bis auf den Impuls P und die β -Komponente des Spins M_I vor und nach der Streuung gleich und es findet keine innere Anregung des Kerns statt:

$$|A\rangle = |P, n, I, M_I\rangle \quad ; \quad |A'\rangle = |P', n, I, M_I\rangle \quad (\text{III.2})$$

Für den Impulsübertrag auf den Kern gilt

$$q_{\mu} = p_{\mu}' - p_{\mu} = p_{\mu} - p_{\mu}' \quad (\text{III.3})$$

Weiter werden folgende Bezeichnungen benutzt:

E, E' Elektronenenergie im Laborsystem vor bzw. nach der Streuung

θ Streuwinkel

m_e Elektronenmasse

m_A Kernmasse

Für die hier betrachteten Elektronenenergien ist die Vernachlässigung der Elektronenmasse ($m_e \ll E=300 \text{ MeV}$) berechtigt; im Laborsystem gilt dann

$$q^2 = 4 E' E \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (\text{III.4})$$

$$E' = \frac{m_A E}{2 E \sin^2 \frac{\theta}{2} + m_A} \quad (\text{III.5})$$

T_{fi} sei die invariante Streuamplitude. Für im Anfangszustand polarisierte Elektronen wird der differentielle Wirkungsquerschnitt folgendermaßen berechnet: T_{fi} wird quadriert, es wird über die Anfangsspinrichtungen des Kerns M_I gemittelt und über die Endspinrichtungen von Kern und Elektron M_I' und α' summiert. Aus dem so erhaltenen Ausdruck $|\overline{T_{fi}}|^2_{\alpha}$ ergibt sich mit Hilfe der Bedingung der Energieerhaltung⁽³⁵⁾

$$m_A (E' - E) - m_e^2 + p' p = 0 \quad (\text{III.6})$$

und unter Vernachlässigung von m_e der differentielle Wirkungs-

querschnitt im Laborsystem zu ⁽⁴¹⁾ (s. Gleichung (A.3)) ⁺)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}^{R/L} = \frac{\pi^2}{4m_A^2} \frac{E'}{E} R |\overline{T_{fi}}|_{+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^2 \quad (\text{III.7})$$

Dabei ist R der Rückstoßfaktor

$$R \equiv \left(1 + \frac{2E}{m_A} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^{-1} \quad (\text{III.8})$$

Der Index R/L bezieht sich auf den Polarisationszustand

$\chi = +1/2/-1/2$ des einfallenden Elektrons.

Für die R-L-Asymmetrie im differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\tilde{A} = \frac{\frac{d\sigma}{d\Omega}^R - \frac{d\sigma}{d\Omega}^L}{\frac{d\sigma}{d\Omega}^R + \frac{d\sigma}{d\Omega}^L} \quad (\text{III.9})$$

folgt

$$\tilde{A} = \frac{|\overline{T_{fi}}|_{+\frac{1}{2}}^2 - |\overline{T_{fi}}|_{-\frac{1}{2}}^2}{|\overline{T_{fi}}|_{+\frac{1}{2}}^2 + |\overline{T_{fi}}|_{-\frac{1}{2}}^2} \quad (\text{III.10})$$

III.2. Übergangsamplituden, qualitatives Verhalten der Asymmetrie

Betrachtet man den Kern zunächst als ein Elementarteilchen, so können die Übergangsamplituden analog zur Streuung am einzelnen Nukleon gebildet werden. In niedrigster Ordnung der Kopplungskonstanten e und g erhält man nach (II.2) und (II.15)

⁺) Sämtliche in dieser Arbeit verwendete Normierungsvorschriften sind in Anhang A im Zusammenhang dargestellt.

$$T_{fi}^{\gamma} \equiv \langle e', A' | H^{\gamma} | e, A \rangle = \frac{e^2}{(2\pi)^2 q^2} \langle e' | j_{\mu}^{\gamma} | e \rangle \langle A' | \gamma^{\mu \gamma} | A \rangle \quad (\text{III.11})$$

$$T_{fi}^{z^0} \equiv \langle e', A' | H^{z^0} | e, A \rangle = \frac{G}{\sqrt{2} (2\pi)^2} \langle e' | j_{\mu}^{z^0} | e \rangle \langle A' | \gamma^{\mu z^0} | A \rangle \quad (\text{III.12})$$

Werden für die leptonischen Anteile die freien Elektronmatrixelemente (II.4) und (II.18) eingesetzt, so entsprechen die Gleichungen (III.11) und (III.12) der ersten Bornschen Näherung für die Übergangsamplituden. Die Güte dieser Näherung wird in Abschnitt III.3 diskutiert und es wird eine Distorsionskorrektur durchgeführt.

Die hadronischen Anteile werden in Kapitel V unter Verwendung von Modellannahmen über den Kern auf die Einteilchenmatrixelemente (II.5) bzw. (II.19) zurückgeführt.

Die gesamte Übergangswahrscheinlichkeit setzt sich folgendermaßen aus den Amplituden (III.11) und (III.12) zusammen:

$$|\overline{T_{fi}}|^2 = |\overline{T_{fi}^{\gamma} + T_{fi}^{z^0}}|^2 = |\overline{T_{fi}^{\gamma}}|^2 + 2 \operatorname{Re} \overline{T_{fi}^{\gamma} T_{fi}^{z^0}} + |\overline{T_{fi}^{z^0}}|^2 \quad (\text{III.13})$$

Durch Einsetzen von (III.11) und (III.12) lassen sich drei differentielle Wirkungsquerschnitte definieren:

a) der rein elektromagnetische

$$\frac{d\sigma^{\gamma\gamma}}{d\Omega} \sim e^4 \frac{1}{q^4} |\langle e' | j_{\mu}^{\gamma} | e \rangle \langle A' | \gamma^{\mu \gamma} | A \rangle|^2 \quad (\text{III.14a})$$

b) der Interferenzterm zwischen Ein-Photon und Ein-Bosonaustausch

$$\frac{d\sigma^{2^0}}{d\Omega} \sim 2 \frac{e^2 G}{12} \frac{1}{q^2} \langle e' | j_\mu^{2^0} | e \rangle \langle e' | j_\nu^{2^0} | e \rangle \cdot \langle A | j^{\mu\nu} | A \rangle \langle A | j^{\nu 2^0} | A \rangle \quad (\text{III.14b})$$

c) der rein schwache Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma^{2^0}}{d\Omega} \sim \left(\frac{G}{12}\right)^2 |\langle e' | j_\mu^{2^0} | e \rangle \langle A | j^{\mu 2^0} | A \rangle|^2 \quad (\text{III.14c})$$

Da der elektromagnetische Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma^{2^0}}{d\Omega}$ von der Longitudinalpolarisation der Elektronen unabhängig ist, ergibt sich für die Asymmetrie (III.9)

$$\tilde{A} \approx \frac{\frac{d\sigma^{2^0 R}}{d\Omega} - \frac{d\sigma^{2^0 L}}{d\Omega}}{2 \frac{d\sigma^{2^0}}{d\Omega}} \quad (\text{III.15})$$

Dabei ist im Zähler $\left(\frac{d\sigma^{2^0 R}}{d\Omega} - \frac{d\sigma^{2^0 L}}{d\Omega}\right)$ gegenüber den Interferenztermen vernachlässigt. Ebenso wird im Nenner die Summe der Interferenzterme $\left(\frac{d\sigma^{2^0 R}}{d\Omega} + \frac{d\sigma^{2^0 L}}{d\Omega}\right)$ und der rein schwachen Wirkungsquerschnitte $\left(\frac{d\sigma^{2^0 R}}{d\Omega}, \frac{d\sigma^{2^0 L}}{d\Omega}\right)$ gegenüber $2 \frac{d\sigma^{2^0}}{d\Omega}$ nicht berücksichtigt. Erwartungsgemäß haben die Matrixelemente der elektromagnetischen und der schwachen neutralen Stromdichten ähnliche q^2 -Abhängigkeit. Da der im Zähler von (III.15) auftretende Interferenzterm nach (III.14b) proportional zu $\frac{1}{q^2}$ und der rein elektromagnetische Term im Nenner von (III.15) nach (III.14a) proportional zu $\frac{1}{q^4}$ ist, kann für die Asymmetrie im wesentlichen das Verhalten

$$\tilde{A} \sim \frac{12 G}{e^2} q^2 \sim \frac{12 G}{e^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (\text{III.16})$$

erwartet werden. Dieser Effekt ergibt sich aus der unterschiedlichen q^2 -Variation des masselosen Photon - und des massiven Z^0 -Propagators ($m_{Z^0} \gg q^2$).

Nach dieser Abschätzung liegt die Größenordnung der Asymmetrie bei $10^{-4} \frac{q^2}{m_{N^2}}$ und ihr Betrag steigt bei fester Elektronenenergie mit wachsendem Streuwinkel. Der Vorteil der großen Asymmetrie bei großen Streuwinkel wird allerdings durch den steilen Abfall der Übergangsraten mit steigendem Streuwinkel ausgeglichen. Speziell in Rückwärtsrichtung verschwindet die kohärente Ladungsstreuung. Für Kernspin $1/2$ überlebt allein die magnetische Streuung (für höhere Spins auch höhere Multipole), der Wirkungsquerschnitt ist damit von einigen wenigen Valenznukleonen bestimmt und wird entsprechend klein.

Nach diesen Überlegungen wird ein optimaler Effekt bei mittleren bis höheren Streuwinkeln erwartet, (typisch $\theta = 80^\circ - 145^\circ$), für die Asymmetrie und Wirkungsquerschnitt groß genug sind, um experimentell nachweisbar zu sein.

III.3 Abschätzung der Distorsionseffekte

Die Anwendbarkeit der ersten korrekten Näherung der Übergangsamplituden (III.11) und (III.12) muß noch näher untersucht werden.

Die Beiträge von Mehrteilchen-Austauschprozessen zur Streuamplitude sind zwar klein und können vernachlässigt werden (35); anders verhält es sich jedoch mit den Distorsionseffekten im Elektronenzustand. Dieser wird durch das langreichweitige Coulombfeld des Kerns deformiert, und zwar um so stärker, je stärker das

Feld, d.h. je höher die Kernladungszahl Z ist.

Es ist bekannt, daß die Bornsche Näherung für die Elektronenstreuung an schwereren Kernen aus diesem Grund schlecht ist⁽⁴²⁾. Sie führt zu unrealistischen Nullstellen in den Formfaktoren (Diffraktionsminima), die bei Berechnung durch exakte Phasenanalyse nicht mehr auftreten⁽⁴³⁾. Für die schwereren Kerne wird daher eine Abschätzung der Distorsionskorrekturen für die Asymmetrie durchgeführt. Sobald ein experimenteller Nachweis einer Asymmetrie gelungen ist, kann der Streuprozess zur genaueren Interpretation mit Hilfe exakter Phasenanalyse untersucht werden.

Qualitativ wird erwartet, daß die Asymmetrie durch die Korrektur vergrößert wird; das Elektron wird durch die Coulombanziehung weiter in den Kern hineingezogen, sodaß die kurzreichweitige schwache Wechselwirkung gegenüber der elektromagnetischen stärker zur Geltung kommt, die ohnehin langreichweitig ist.

Zur Abschätzung werden die Distorsionskorrekturen im Rahmen der Potential-Streutheorie ohne Berücksichtigung der Spins betrachtet. Dann gilt für die erste Bornsche Näherung der Übergangsamplituden im Ortsraum⁽⁴⁴⁾

$$T_{\rho i}^{x/2 \circ (E)} \sim (\varphi_{\rho i}^{\ast}, V^{x/2 \circ} \varphi_{\rho}^{\ast}) \equiv \int d^3x \varphi_{\rho i}^{\ast}(\vec{x}) V^{x/2 \circ}(\vec{x}) \varphi_{\rho}^{\ast}(\vec{x}) \quad (III.17)$$

wobei die Streuzustände $\varphi_{\rho}^{\ast}$ durch die ebenen Wellen

$$\varphi_{\rho}^{\ast}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \quad (III.18)$$

dargestellt werden.

Für das "schwache Potential" $V^{Z^0}(\vec{x})$ wird die Kastenform

$$V^{Z^0}(\vec{x}) = \begin{cases} g' = \text{const.} & \text{für } 0 \leq x \leq R \\ 0 & \text{" } R < x \end{cases} \quad (\text{III.19})$$

angenommen; für R wird der Radius des Kerns eingesetzt. Wegen der kurzen Reichweite der schwachen Elektron-Nukleon-Wechselwirkung kann $V^{Z^0}(\vec{x})$ innerhalb des Kerns proportional zur Dichte der Nukleonen $\rho^N(\vec{x})$ gesetzt werden, während es außerhalb verschwindet. Für eine gleichförmige Nukleonenverteilung im Kern $\rho^N(\vec{x}) = \rho^N = \text{const.}$ erhält man dann Gleichung (III.19) ($g' \sim \rho^N = \text{const.}$). Aus diesen Gründen gibt (III.19) für kugelsymmetrische Kerne eine vernünftige, wenn auch sehr globale Beschreibung der schwachen Wechselwirkung zwischen dem streuenden Elektron und dem Kern. Der absolute Wert von $V^{Z^0} = g'$ ist hier nicht wichtig, da für die Abschätzung nur das Verhältnis der korrigierten Übergangsamplitude (Gleichung (III.21), s. unten) zur ersten Bornschen Näherung (III.17) benötigt wird (s. (III.22)).

Die Coulombdistorsion wird nun dadurch berücksichtigt, daß für die Streuzustände statt der ebenen Wellen (III.18) die Lösungen der Schrödingergleichung mit dem Coulombpotential eines Punktkerns $V(x) = \frac{Z\alpha}{x}$, die Sommerfeld-Maue-Funktionen⁽⁴⁵⁾

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{\pi n}{2}} \Gamma(1+in) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} F(-in, 1, i(p x - \vec{p} \cdot \vec{x}))$$

$$\text{mit } n \equiv \frac{\alpha Z E}{p} \quad (\text{III.20})$$

eingesetzt werden:

$$T_{fi}^{Z^0(c)} \sim (\psi_{\vec{p}_f} | V^{Z^0} | \psi_{\vec{p}_i}) \equiv \int d^3x \psi_{\vec{p}_f}^*(\vec{x}) V^{Z^0}(\vec{x}) \psi_{\vec{p}_i}(\vec{x}) \quad (\text{III.21a})$$

Für das Potential eines Punktkerns ist die erste Bornsche

Näherung der Coulombstreuamplitude die exakte Lösung des

Problems:

$$|T_{fi}^{Z^0(c)}| = |T_{fi}^{Z^0(B)}| \quad (\text{III.21b})$$

Korrekturfaktoren $c^{\gamma/2^0}$ werden definiert durch

$$c^{\gamma/2^0} = \frac{|T_{fj}^{\gamma/2^0(c)}|}{|T_{fj}^{\gamma/2^0(B)}|}$$

und es ist in der hier betrachteten Näherung

(III.22)

$$c^{\gamma/2^0} = \frac{|(\psi_{fj}^{\gamma/2^0}, V^{\gamma/2^0} \psi_{ij})|}{|(\psi_{fj}^{\gamma/2^0}, V^{\gamma/2^0} \psi_{ij})|}, \quad c^{\gamma} = 1$$

Da die Distorsionskorrekturen hauptsächlich durch die Coulombwechselwirkung zwischen der Kern- und der Elektronenladung bestimmt werden, wird sich der Wert der Faktoren (III.22) auch bei Berücksichtigung des Elektronenspins nicht wesentlich ändern und die Distorsionskorrekturen können für rechts- und links-händige Elektronen angenähert durch (III.22) beschrieben werden. Dann gilt für die Asymmetrie (III.15)

$$\tilde{A}^{\gamma(c)} = f^c \tilde{A}^{\gamma(z)} = \frac{c^{\gamma/2^0}}{c^{\gamma}} \tilde{A}^{\gamma}$$

(III.23)

Der Korrekturfaktor in der Asymmetrie $f^c \equiv \frac{c^{\gamma/2^0}}{c^{\gamma}}$ kann nach (III.17), (III.21) und (III.22) bestimmt werden. Er hängt i.a. ebenso wie die $c^{\gamma/2^0}$ von der Energie der einfallenden Elektronen E und dem Streuwinkel θ ab. Die Integrale in (III.21) werden numerisch berechnet. Für den Kern ^{209}Bi und die Elektronenenergie $E=300$ MeV sind die Werte von f^c für verschiedene Streuwinkel in Tabelle II eingetragen.

Tab. II: Korrektur der Asymmetrie durch die Coulombdistorsion für ^{209}Bi , $E = 300$ MeV

$\theta [^\circ]$	10	40	70	100	130	160
f^c	1,05	1,13	1,53	1,47	1,43	1,30

Wie erwartet gilt immer $f^C > 1$, die Asymmetrie wird durch den Einfluß der Coulombdistorsion verstärkt. In Vorwärtsrichtung, wo das Elektron auch bei der Streuung selbst vom Feld des Kerns nicht stark beeinflusst wird, sind die Korrekturen f^C ebenfalls klein (5%, 13% für $\theta = 10^\circ, 40^\circ$). Für mittlere bis große Streuwinkel ist auch der Einfluß der Coulombwechselwirkung auf die Zustände vor und nach der Streuung größer (Korrekturen der Asymmetrie zwischen 30% und 53% für $\theta \geq 70^\circ$).

Besonders in der Nähe der Diffraktionsminima der ersten Bornschen Näherung für den differentiellen Wirkungsquerschnitt wirkt sich die Coulombkorrektur nach Tabelle II auch in der Asymmetrie stark aus.

Vor allem wegen der Vernachlässigung der endlichen Kernausdehnung geben die Werte von f^C aus Tabelle II eine recht grobe Näherung für die Distorsionskorrekturen. Sie überschätzen die tatsächlichen Korrekturen, da die Abschwächung der Coulombanziehung für $r < R$ durch die äußere Protonenverteilung nicht berücksichtigt wird. Die Faktoren f^C sind daher in die quantitativen Ergebnisse für die Asymmetrie (Fig. 1 bis 7) nicht mit einbezogen. Das qualitative Ergebnis, daß die Asymmetrie durch die Distorsionskorrekturen vergrößert wird, hat jedoch allgemeine physikalische Gründe (s. oben) und ist sicher unabhängig von den verwendeten Vereinfachungen.

IV. BERECHNUNG DER R-1-ASYMMETRIE ALS FUNKTION VON KERNMULTIPOLMOMENTEN

IV.1. Multipolentwicklung der Kernstromdichten

Zur Berechnung der Übergangsamplituden und damit der Asymmetrie müssen die unbekannten Kernstrommatrixelemente $\langle A' | \hat{j}_\mu^{r/2} | A \rangle$ bestimmt werden. Es liegt nahe, zunächst eine Multipolentwicklung der Kernstromdichten vorzunehmen, damit Auswahlregeln für Drehimpuls und Parität ausgenutzt werden können. In diesem Abschnitt wird die Spezialisierung (III.2) nicht vorausgesetzt, sodaß die Überlegungen auf die elastische und inelastische Streuung angewandt werden können. Ausgegangen wird von den Fouriertransformierten der Stromdichte^{*)}:

$$\hat{j}_\mu(\vec{q}) = \int d^3x \, e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} \hat{j}_\mu(\vec{x}) \quad (\text{IV.1})$$

Für die Lorentzkomponente $\mu = 0$ ist die Multipolentwicklung besonders einfach. Die ebene Welle im Integranden von (IV.1) wird nach Partialwellen entwickelt und man erhält für das Matrixelement von (IV.1) zwischen den Kernzuständen $|A'\rangle$ und $|A\rangle$ mit den Spinquantenzahlen I', M_I' und I, M_I (46)

$$\begin{aligned} \langle I' M_I' | \hat{j}_0(\vec{q}) | I M_I \rangle &= 4\pi \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} (-i)^{\lambda} Y_{\lambda\mu}^*(q_1, q_2) \cdot \\ &\cdot \langle I' M_I' | \hat{j}_{\lambda\mu}(\vec{q}) | I M_I \rangle \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

mit den Ladungsmultipolmomenten

$$\hat{j}_{\lambda\mu}(\vec{q}) = \int d^3x \, Y_{\lambda\mu}(q_x, q_y) j_{\lambda}(q_x) \hat{j}_0(\vec{x}) \quad (\text{IV.3})$$

^{*)} Im folgenden werden Operatoren im Kernraum mit $\hat{}$ gekennzeichnet, Größen ohne diese Kennzeichnung sind Matrixelemente dieser Operatoren zwischen Kernzuständen: $j_\mu = \langle A' | \hat{j}_\mu | A \rangle$.

Für die Komponenten $\mu = 1, 2, 3$ von (IV.1) wird die Entwicklung nach Vektorkugelfunktionen nach Blatt-Weisskopf⁽⁴⁷⁾ verwendet:

In der spärischen Basis

$$\vec{e}_{(\lambda=0)} = \vec{e}_3 = \frac{\vec{q}}{q} \quad ; \quad e_{(\lambda=\pm 1)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 \pm i \vec{e}_2) \quad (\text{IV.4})$$

ergibt sich für die Transversalkomponenten ($\lambda = \pm 1$)⁽⁴⁷⁾

$$\begin{aligned} \langle I' H_I' | \hat{j}_{(\lambda=\pm 1)} | I H_I \rangle &= -\sqrt{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=-j}^j (-i)^j \sqrt{2j+1} \cdot \\ &\cdot \langle I' H_I' | \hat{T}_{jH}^{\ell}(q) + \lambda \hat{T}_{jH}^{mag}(q) | I H_I \rangle \mathcal{D}_{H\lambda}^{(j)}(\omega) \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

mit den transversalen Multipolmomenten

$$\hat{T}_{jH}^{\ell}(q) = \frac{1}{q} \int d^3x [\vec{\nabla} \times (j_j(qx) \mathcal{Y}_{jH}^H(q_x, \vartheta_x))] \cdot \hat{\vec{T}}(\vec{x}) \quad (\text{IV.6})$$

$$\hat{T}_{jH}^{mag}(q) = \int d^3x [j_j(qx) \mathcal{Y}_{jH}^H(q_x, \vartheta_x)] \cdot \hat{\vec{T}}(\vec{x}) \quad (\text{IV.7})$$

In den Gleichungen (IV.2) bis (IV.7) wird die folgende Notation verwendet:

$$q = |\vec{q}|$$

φ_q, ϑ_q bzw. φ_x, ϑ_x = Winkelkoordinaten der Vektoren $\vec{q}$ bzw. $\vec{x}$

$${}^m(-\varphi_q, -\vartheta_q, \varphi_q)$$

$\mathcal{Y}_{jH}$ = Kugelfunktionen

j_j = spärische Besselfunktionen

$\mathcal{Y}_{jH}^H$ = Vektorkugelfunktionen; es ist $\mathcal{Y}_{jH}^H = \sum_{m_1, m_2} \langle j_{m_1} m_1 | j_1 j_2 H \rangle \cdot \mathcal{Y}_{jH} \cdot \vec{e}_n$

$\mathcal{D}_{H\lambda}^{(j)}$ = Darstellung der Drehmatrix zum Drehimpuls J

Die Entwicklung (IV.5) zeigt, daß die Monopolmomente der transversalen Komponenten von $\hat{J}(\vec{q})$ verschwinden: Die Summe beginnt im Gegensatz zur Ladungsdichte (IV.2) bei $J=1$.

Die Multipole (IV.6) besitzen ebenso wie die Ladungsmultipole (IV.3) die Parität $(-1)^J$ für Vektorströme, $((-1)^{J+1}$ für Axialströme) und werden daher sowohl für den elektromagnetischen als auch für den schwachen neutralen Strom als "elektrisch" bezeichnet, die Multipole (IV.7) wegen ihrer Parität $P = (-1)^{J+1}$ für Vektorströme $((-1)^J$ für Axialströme) dagegen als "magnetisch". (48)

Für die Longitudinalkomponente ($\lambda = 0$) kann eine zu (IV.5) analoge Entwicklung durchgeführt werden. Sie ergibt sich für erhaltene Ströme jedoch auf eine einfachere Weise aus der Kontinuitätsgleichung:

$$\text{Aus } q_\mu \hat{J}^\mu(\vec{q}) = 0 \quad (\text{IV.8})$$

folgt wegen $\vec{q} \cdot \hat{\vec{J}} = q \hat{J}_{(\lambda=0)}$ sofort

$$\hat{J}_{(\lambda=0)}(\vec{q}) = \frac{q_{\mu=0}}{q} \hat{J}_{\mu=0} \quad (\text{IV.9})$$

Gleichung (IV.9) besagt, daß bei Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung die Ladungs- und Longitudinalkomponenten der Ströme nicht länger linear unabhängig sind, sodaß $\hat{J}_{(\lambda=0)}$ aus der Ladungsdichte berechnet werden kann. Sie gilt für erhaltene Ströme, d.h. bei Voraussetzung der CVC-Hypothese außer für den elektromagnetischen Strom auch für den Vektoranteil des schwachen neutralen Kernstromes. Wie die Überlegungen aus Abschnitt IV.3 zeigen werden, tritt der Axialanteil der longitudinalen Komponente in der Übergangswahrscheinlichkeit nicht auf, falls die Kernzustände paritätsrein sind, sodaß mit den Gleichungen (IV.2),

(IV.5) und (IV.9) sämtliche benötigten Terme von $\hat{T}_\mu(\vec{q})$ durch eine Summe über die Multipole (IV.3), (IV.6) und (IV.7) ausgedrückt sind.

IV.2. Auswahlregeln für elastische Streuung

Die Multipole (IV.3), (IV.6) und (IV.7) sind irreduzible Tensoroperatoren im Kernspinraum. Auf Grund des Wigner-Eckart Theorems sind die bezüglich des Kernspins I reduzierten Matrixelemente gegeben durch (49)

$$\begin{aligned} \langle I' \| \hat{T}_\mu \| I \rangle &= \omega(I', I, I, \mu, \mu) \langle I' \| \hat{T}_\mu \| I \rangle \\ \omega(I', I, I, \mu, \mu) &\equiv (-1)^{I'-I} \begin{pmatrix} I' & \mu & I \\ -I' & \mu & I \end{pmatrix}^{-1} \quad (\text{IV.10}) \end{aligned}$$

und es gilt die Dreiecks-Auswahlregel

$$|I' - I| \leq \mu \leq I' + I \quad (\text{IV.11})$$

Speziell für elastische Streuung also

$$0 \leq \mu \leq 2I \quad (\text{IV.11a})$$

Aus der Hermitizität der Ströme und unter Voraussetzung von Zeitumkehrinvarianz ihrer Matrixelemente folgt für die reduzierten Matrixelemente zwischen Kernzuständen mit den Spin- und Paritätsquantenzahlen $I^{P'}$ und I^P (30)

$$\begin{aligned} \langle I^{P'} \| \hat{T}_\mu \| I^P \rangle &= (-1)^{I'-I+\mu} \langle I^P \| \hat{T}_\mu \| I^{P'} \rangle \\ \langle I^{P'} \| \hat{T}_\mu \| I^P \rangle &= (-1)^{I'-I+\mu+1} \langle I^P \| \hat{T}_\mu \| I^{P'} \rangle \quad (\text{IV.12}) \end{aligned}$$

Hieraus können für jede Wertekombination von I^P , I'^P für die verschiedenen Lorentzanteile der Matrixelemente Auswahlregeln abgeleitet werden. So folgt z.B. für die elastische Streuung, d.h. für $I' = I$ und $P' = P$ aus (IV.12)

$$\begin{aligned} J \text{ gerade für } & \langle I || \hat{H}_J || I \rangle \\ J \text{ ungerade für } & \langle I || \hat{T}_J || I \rangle \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

Aus dem im Abschnitt IV.1 für die verschiedenen Multipole angegebenen Zusammenhang zwischen Parität und Drehimpuls J ergeben sich für die Vektor- bzw. Axialvektoranteile der Matrixelemente folgende Forderungen

$$\begin{aligned} J \text{ gerade für } & \langle I || \hat{H}_{Jv} || I \rangle; J \text{ ungerade für } \langle I || \hat{H}_{Ja} || I \rangle \\ J \text{ gerade für } & \langle I || \hat{T}_{Jv}^{el} || I \rangle; J \text{ ungerade für } \langle I || \hat{T}_{Ja}^{el} || I \rangle \quad (\text{IV.14}) \\ J \text{ ungerade für } & \langle I || \hat{T}_{Jv}^{mag} || I \rangle; J \text{ gerade für } \langle I || \hat{T}_{Ja}^{mag} || I \rangle \end{aligned}$$

Kombiniert man die im elastischen Fall aus T-Invarianz folgenden Forderungen (IV.13) mit den paritätsbedingten Forderungen (IV.14) und berücksichtigt die Drehimpulsauswahlregeln (IV.11a), so bleiben für die einzelnen Matrixelemente die in Tabelle III angegebenen Möglichkeiten.

Durch diese Auswahlregeln vereinfachen sich besonders für Kerne mit niedrigen Spins die Entwicklungen (IV.2) und (IV.5) sehr. Die für die hier betrachteten Kerne vorkommenden Multipolmomente sind in Tabelle IIIa explizit aufgezählt. Wie sich zeigen wird, wird durch das Auftreten der transversalen Multipolmomente bei Kernen mit $I \neq 0$ die Winkelabhängigkeit der Asymmetrie gegenüber demjenigen bei Kernen und $I = 0$ stark geändert; es können andere Lorentzterme der schwachen neutralen Ströme isoliert werden. Durch das Auftreten der höheren Partialwellen für die Kerne mit

höheren Spins wird die Asymmetrie vergrößert.

Wie man an (IV.12) sieht, setzen diese Überlegungen allerdings voraus, daß die Kernzustände vor und nach der Streuung paritätsrein sind, d.h. hier werden die durch die kerninterne schwache Wechselwirkung verursachten Paritätsmischungen der Kernzustände vernachlässigt. Dies ist nach den in Kapitel I genannten Überlegungen eine vernünftige Voraussetzung für die elastische Streuung.

Tabelle III: Bei der elastischen Streuung erlaubte Matrixelemente

Matrixelemente	Vektoranteil	Axialanteil
$\langle I^P \ \hat{H}_2 \ I^P \rangle$	J gerade	---
$\langle I^P \ \hat{T}_2^A \ I^P \rangle$	---	J ungerade
$\langle I^P \ \hat{T}_2^{mag} \ I^P \rangle$	J ungerade	---
wobei $0 \leq J \leq 2I$ für alle Matrixelemente		

Tabelle IIIa: Multipolmomente der betrachteten Kerne

Isotop	existierende Multipolmomente
$^{12}\text{C}, ^{40}\text{Ca}, ^{208}\text{Pb} (I=0)$	M_0
$^3\text{H}, ^3\text{He} (I=1/2)$	M_0 T_1
$^{41}\text{Ca} (I=7/2)$	$M_0 M_2 M_4 M_6$ $T_1 T_3 T_5 T_7$
$^{209}\text{Bi} (I=9/2)$	$M_0 M_2 M_4 M_6 M_8$ $T_1 T_3 T_5 T_7 T_9$

IV.3. Differentieller Wirkungsquerschnitt und Asymmetrie

IV.3.1 Elektromagnetischer Wirkungsquerschnitt

Die folgenden Überlegungen schließen, wenn nicht ausdrücklich verneint, die inelastische Streuung mit ein. Ebenso wie bei der Ableitung der Auswahlregeln in Abschnitt IV.2 wird vorausgesetzt, daß die Kerne durch reine Eigenzustände zum Paritätsoperator dargestellt werden.

Setzt man die Multipolentwicklung (IV.2), (IV.5) der Kernstrommatrixelemente und die leptonischen Matrixelemente (II.4) bzw. (II.18) in die Gleichungen (III.11) bzw. (III.12) ein, so erhält man die schwache bzw. elektromagnetische Übergangsamplitude für die Elektron-Kernstreuung in erster Bornscher Näherung. Der sich für den elektromagnetischen Anteil der Übergangswahrscheinlichkeit $|\overline{T}_{fi}^{\text{em}}|^2$ ergebende Ausdruck ist aus der Literatur bekannt; er wird z.B. in Ref. (50) ausführlich berechnet. Es ist mit den hier verwendeten Normierungen

$$|\overline{T}_{fi}^{\text{em}}|^2 = \frac{\alpha^2}{q^4 \pi^2} 2 (B^r V_L + 2 C^r V_T) \quad (\text{IV.15})$$

mit den leptonischen Anteilen

$$V_L \equiv 2 E^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (\text{IV.16})$$

$$V_T \equiv E^2 (1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}) \quad (\text{IV.17})$$

und den hadronischen Anteilen

$$B^r \equiv \sum_{n_I', n_I} |y^{0r}|^2 = 4\pi \sum_I |\langle I' || \hat{H}_I^r || I \rangle|^2 \quad (\text{IV.18})$$

$$C^r \equiv \sum_{n_I', n_I} |y^{(d=\pm 1)}|^2 = 2\pi \sum_I \left\{ |\langle I' || \hat{I}_I^{20r} || I \rangle|^2 + |\langle I' || \hat{I}_I^{\text{mag}r} || I \rangle|^2 \right\} \quad (\text{IV.19})$$

Die Gleichungen (IV.15), (IV.18), (IV.19) zeigen, daß keine Interferenz der verschiedenen bei der Multipolentwicklung auftretenden Partialwellen stattfindet. Dies hat seinen Grund in der Drehimpulserhaltung: Nach dem Wigner-Eckart Theorem treten bei der Bildung der reduzierten Matrixelemente die 3-j Symbole $\begin{pmatrix} I' & 1 & I \\ -M_I' & 1 & M_I \end{pmatrix}$ auf; für diese gilt (49)

$$\sum_{M_I', M_I} (-1)^{I'(I'+1)+1+1} \begin{pmatrix} I' & 1 & I \\ -M_I' & 1 & M_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I' & 1 & I \\ -M_I' & 1 & M_I \end{pmatrix} \sim \delta_{1,1} \delta_{M_I', M_I} \quad (\text{IV.20})$$

sodaß sämtliche Produkte mit $J' \neq J$ verschwinden.

Bei Summation über die Spinrichtungen M_I, M_I' des Kerns wurde außerdem die z-Achse in $\vec{q}$ -Richtung gelegt. Dann gilt $\omega = (0,0,0)$ und es folgt $\mathcal{D}_{M_I 1}^{(1)} = \delta_{M_I 1}$. Die Ladungsmultipolmomente tragen den Drehimpuls 0 in $\vec{q}$ -Richtung, die transversalen den Drehimpuls ± 1 . Daher kann in der Summe über die Kernspins aus Drehimpulsgründen auch keine Interferenz zwischen den Ladungs- und den transversalen Multipolmomenten stattfinden. Ebenso gibt es keine Interferenz zwischen den elektrischen und magnetischen Transversalmomenten, da sie aus Paritätsgründen nicht beide zur gleichen Partialwelle beitragen können.

Durch Einsetzen von (IV.15) in die Gleichung für den differentiellen Wirkungsquerschnitt (III.7) ergibt sich der von der Elektronenpolarisation unabhängige elektromagnetische Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma^{\text{nr}}}{d\Omega} = \frac{R}{(2I+1)} \frac{\alpha^2 \pi^2}{4 \mu_A^2 E^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \sum_{\frac{1}{2}} \left\{ |\langle I' || \hat{T}_{\frac{1}{2}}^{\text{el}} || I \rangle|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + (|\langle I' || \hat{T}_{\frac{1}{2}}^{\text{mag}} || I \rangle|^2 + |\langle I' || \hat{T}_{\frac{1}{2}}^{\text{mag}} || I \rangle|^2) \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}) \right\} \quad (\text{IV.21})$$

Tab. IV : Hadronische Anteile der Übergangswahrscheinlichkeit

μ	ν	$\sum_{H_I', H_I} g_{\mu}^{\nu}(\vec{q}) g_{0\nu}^{\nu*}(\vec{q})$	$\sum_{H_I', H_I} g_{\mu}^{\nu}(\vec{q}) g_{0\nu}^{2^0*}(\vec{q})$	$\sum_{H_I', H_I} g_{\mu}^{\nu}(\vec{q}) g_{0\Lambda}^{2^0*}(\vec{q})$
0	0	$\sum_{H_I', H_I} g^{\nu} ^2 = B^{\nu}$	$\sum_{H_I', H_I} g_{0\nu}^{\nu 2^0*} = B_{\nu}^{2^0}$	$\sum_{H_I', H_I} g^{\nu} g_{\Lambda}^{2^0*} = 0$
0	1	$\sum_{H_I', H_I} g^{\nu} g_1^{\nu*} = 0$	$\sum_{H_I', H_I} g^{\nu} g_{1\nu}^{2^0*} = 0$	$\sum_{H_I', H_I} g^{\nu} g_{1\Lambda}^{2^0*} = 0$
0	2	$\sum_{H_I', H_I} g^{\nu} g_2^{\nu*} = 0$	$\sum_{H_I', H_I} g^{\nu} g_{2\nu}^{2^0*} = 0$	$\sum_{H_I', H_I} g^{\nu} g_{2\Lambda}^{2^0*} = 0$
0	3	$\sum_{H_I', H_I} g^{\nu} g_3^{\nu*} = \frac{9_0}{9} B^{\nu}$	$\sum_{H_I', H_I} g^{\nu} g_{3\nu}^{2^0*} = \frac{9_0}{9} B_{\nu}^{2^0}$	$\sum_{H_I', H_I} g^{\nu} g_{3\Lambda}^{2^0*} = 0$
1	0	$\sum_{H_I', H_I} g_1^{\nu} g^{\nu*} = 0$	$\sum_{H_I', H_I} g_1^{\nu} g_{\nu}^{2^0*} = 0$	$\sum_{H_I', H_I} g_1^{\nu} g_{\Lambda}^{2^0*} = 0$
1	1	$\sum_{H_I', H_I} g_1^{\nu} ^2 = C^{\nu}$	$\sum_{H_I', H_I} g_1^{\nu} g_{1\nu}^{2^0*} = C_{\nu}^{2^0}$	$\sum_{H_I', H_I} g_1^{\nu} g_{1\Lambda}^{2^0*} = 0$
1	2	$\sum_{H_I', H_I} g_1^{\nu} g_2^{\nu*} = 0$	$\sum_{H_I', H_I} g_1^{\nu} g_{2\nu}^{2^0*} = 0$	$\sum_{H_I', H_I} g_1^{\nu} g_{2\Lambda}^{2^0*} = i C_{\Lambda}^{2^0}$
1	3	$\sum_{H_I', H_I} g_1^{\nu} g_3^{\nu*} = 0$	$\sum_{H_I', H_I} g_1^{\nu} g_{3\nu}^{2^0*} = 0$	$\sum_{H_I', H_I} g_1^{\nu} g_{3\Lambda}^{2^0*} = 0$
2	0	$\sum_{H_I', H_I} g_2^{\nu} g^{\nu*} = 0$	$\sum_{H_I', H_I} g_2^{\nu} g_{\nu}^{2^0*} = 0$	$\sum_{H_I', H_I} g_2^{\nu} g_{\Lambda}^{2^0*} = 0$
2	1	$\sum_{H_I', H_I} g_2^{\nu} g_1^{\nu*} = 0$	$\sum_{H_I', H_I} g_2^{\nu} g_{1\nu}^{2^0*} = 0$	$\sum_{H_I', H_I} g_2^{\nu} g_{1\Lambda}^{2^0*} = -i C_{\Lambda}^{2^0}$
2	2	$\sum_{H_I', H_I} g_2^{\nu} ^2 = C^{\nu}$	$\sum_{H_I', H_I} g_2^{\nu} g_{2\nu}^{2^0*} = C_{\nu}^{2^0}$	$\sum_{H_I', H_I} g_2^{\nu} g_{2\Lambda}^{2^0*} = 0$
2	3	$\sum_{H_I', H_I} g_2^{\nu} g_3^{\nu*} = 0$	$\sum_{H_I', H_I} g_2^{\nu} g_{3\nu}^{2^0*} = 0$	$\sum_{H_I', H_I} g_2^{\nu} g_{3\Lambda}^{2^0*} = 0$
3	0	$\sum_{H_I', H_I} g_3^{\nu} g^{\nu*} = \frac{9_0}{9} B^{\nu}$	$\sum_{H_I', H_I} g_3^{\nu} g_{\nu}^{2^0*} = \frac{9_0}{9} B_{\nu}^{2^0}$	$\sum_{H_I', H_I} g_3^{\nu} g_{\Lambda}^{2^0*} = 0$
3	1	$\sum_{H_I', H_I} g_3^{\nu} g_1^{\nu*} = 0$	$\sum_{H_I', H_I} g_3^{\nu} g_{1\nu}^{2^0*} = 0$	$\sum_{H_I', H_I} g_3^{\nu} g_{1\Lambda}^{2^0*} = 0$
3	2	$\sum_{H_I', H_I} g_3^{\nu} g_2^{\nu*} = 0$	$\sum_{H_I', H_I} g_3^{\nu} g_{2\nu}^{2^0*} = 0$	$\sum_{H_I', H_I} g_3^{\nu} g_{2\Lambda}^{2^0*} = 0$
3	3	$\sum_{H_I', H_I} g_3^{\nu} ^2 = (\frac{9_0}{9})^2 B^{\nu}$	$\sum_{H_I', H_I} g_3^{\nu} g_{3\nu}^{2^0*} = (\frac{9_0}{9})^2 B_{\nu}^{2^0}$	$\sum_{H_I', H_I} g_3^{\nu} g_{3\Lambda}^{2^0*} = 0$

Bei den verschwindenden Termen ist eingetragen, ob sie aus Gründen der Drehimpuls- (D) oder der Paritätserhaltung (P) gleich 0 sind.

Die Größen B^{ν} , C^{ν} , $B_{\nu}^{2^0}$, $C_{\nu}^{2^0}$ und $C_{\Lambda}^{2^0}$ sind in den Gleichungen (IV.18), (IV.19), (IV.24), (IV.25) und (IV.30) gegeben.

können einen nicht verschwindenden Beitrag zur mittleren Übergangswahrscheinlichkeit liefern. Weitere Auswahlregeln ergeben sich aus weiter unten erläuterten Paritätsbetrachtungen. Für den schwachen neutralen Vektorstrom lassen sich die Terme (IV.23) ähnlich wie im elektromagnetischen Fall berechnen; man erhält analoge Ausdrücke, die aus den elektromagnetischen Ergebnissen durch Ersetzen von B^r (IV.18) und C^r (IV.19) durch $B_v^{z^0}$ und $C_v^{z^0}$ hervorgehen, wobei (51)

$$B_v^{z^0} \equiv \sum_{H_I, H_F} g^{0r} g_v^{z^0 r} = 4\pi \sum_g \langle I' \| \hat{H}_g^r \| I \rangle \langle I' \| \hat{H}_g^{z^0} \| I \rangle^* \quad (IV.24)$$

$$C_v^{z^0} \equiv \sum_{H_I, H_F} g_{(\lambda=+1)}^r g_{(\lambda=-1)}^{z^0 r} = 2\pi \sum_g \left\{ \langle I' \| \hat{T}_g^{M^r} \| I \rangle \langle I' \| \hat{T}_g^{M^{z^0}} \| I \rangle^* + \langle I' \| \hat{T}_g^{mag^r} \| I \rangle \langle I' \| \hat{T}_g^{mag^{z^0}} \| I \rangle^* \right\} \quad (IV.25)$$

Die elektromagnetischen und die schwachen neutralen Matrixelemente, die in (IV.24) und (IV.25) miteinander multipliziert werden, sind jeweils entweder beide reell oder beide rein imaginär, sodaß die Produkte immer reell sind.

Wie man sieht, treten natürlich wegen der Paritätserhaltung ebenso wie im elektromagnetischen Fall keine Interferenzen zwischen den magnetischen und elektrischen transversalen Matrixelementen auf.

Da aus Paritätsgründen die vektoriellen und die axialen Ladungs- und Longitudinalmomente nicht zur gleichen Partialwelle beitragen können, gibt es keine Interferenz zwischen den (vektoriellen) elektromagnetischen und den axialen schwachen neutralen Ladungs- bzw. Longitudinalmomenten. Daher verschwinden für $H_A^{\mu\nu r z^0}$, also für denjenigen hadronischen Anteil (IV.22), der den axialen schwachen neutralen Kernstrom enthält, die zu $B_v^{z^0}$ (IV.24) ana-

logischen Ausdrücke.

Wie in Abschnitt IV.1 erwähnt, werden deshalb die axialen Ladungs- und Longitudinalmomente zur Berechnung der Interferenz zwischen elektromagnetischer und schwacher Übergangsamplitude nicht benötigt. Diese treten nur im rein schwachen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma^{2^0 2^0}}{d\Omega}$ auf, der hier vernachlässigt werden kann. Von den Termen (IV.23) tragen zum hadronischen Anteil, der den axialen schwachen neutralen Strom enthält, nur die

$$H_A^{\mu 0 2^0} \text{ mit } \begin{array}{l} \mu=1, \quad \nu=1 \\ \quad \quad \quad \nu=2 \\ \mu=2, \quad \nu=1 \\ \quad \quad \quad \nu=2 \end{array} \quad (\text{IV.26})$$

bei. Diese müssen explizit bestimmt werden. Ihre Berechnung soll hier am Beispiel von $H^{2^0 1^0 2^0}$ angedeutet werden. Zunächst werden die Lorentzkomponenten y^{2^0}, y^{1^0} in $H^{2^0 1^0 2^0}$ durch die Stromkomponenten im Koordinatensystem (IV.4) $y_{\lambda}^{1^0 2^0}$ ($\lambda=\pm 1$) ausgedrückt, für die dann die Multipolentwicklung (IV.5) eingesetzt wird. Man erhält

$$H^{2^0 1^0 2^0} \equiv \sum_{h_L, h_I} y^{2^0} y^{1^0} y^{2^0} = \frac{i}{2} \sum_{h_L, h_I} (y_{-1}^{1^0} y_{-1}^{2^0} - y_{+1}^{1^0} y_{+1}^{2^0}) \quad (\text{IV.27})$$

Mit der Entwicklung (IV.5) gilt

$$\sum_{h_L, h_I} y_{\lambda}^{1^0} y_{\lambda}^{2^0} = 2\pi \sum_{\hat{J}} \langle I \| \hat{T}_{\hat{J}+\lambda}^{1^0} \hat{T}_{\hat{J}}^{2^0} \| I \rangle \langle I \| \hat{T}_{\hat{J}}^{1^0} \hat{T}_{\hat{J}+\lambda}^{2^0} \| I \rangle^* \quad (\text{IV.28})$$

Hierbei wurde die Beziehung (IV.20) ausgenutzt. Die Paritätserhaltung führt im Falle $y_{\lambda}^{2^0} \equiv y_{\lambda A}^{2^0}$ zum umgekehrten Schluß wie bei $H^{\mu 0 2^0}$:

Nur die gemischten transversalen Produkte aus (IV.28) ver-

schwinden nicht und es folgt

$$\sum_{h_I, h_{\bar{I}}} y_{\lambda}^{\gamma} y_{\lambda}^{2^0 \gamma} = 2\pi\lambda \sum_{\hat{y}} \{ \langle I' || \hat{T}_{\hat{y}}^{2^0 \gamma} || I \rangle \langle I' || \hat{T}_{\hat{y}_A}^{mag 2^0} || I \rangle^* + \langle I' || \hat{T}_{\hat{y}}^{mag \gamma} || I \rangle \langle I' || \hat{T}_{\hat{y}_V}^{mag 2^0} || I \rangle^* \} \quad (IV.29)$$

d.h.

$$C_A^{2^0} \equiv \sum_{h_I, h_{\bar{I}}} y_{(\lambda=+1)}^{\gamma} y_{(\lambda=+1)\lambda}^{2^0 \gamma} = - \sum_{h_I, h_{\bar{I}}} y_{(\lambda=-1)}^{\gamma} y_{(\lambda=-1)\lambda}^{2^0 \gamma} \quad (IV.30)$$

Durch Einsetzen in (IV.27) ergibt sich daher der in Tabelle IV angegebene Wert

$$H_A^{2^1 \gamma 2^0} = -i C_A^{2^0} \quad (IV.31)$$

IV. 3.2.2 Multiplikation mit dem leptonischen Anteil

Für das Produkt aus elektromagnetischen und schwachen neutralen Matricelementen (II.4) und (II.18) erhält man mit der Normierung (A.6) unter Vernachlässigung von m_e

$$L_{\mu\nu}^{2^0 R/L} = L_{\mu\nu}^{sym R/L} + L_{\mu\nu}^{antisym R/L} \quad (IV.32)$$

$$L_{\mu\nu}^{sym R/L} \equiv 2[p_{\mu}' p_{\nu} + p_{\mu} p_{\nu}' - g_{\mu\nu} p' p] (c_{\nu e} \pm c_{\mu e}) \quad (IV.33)$$

$$L_{\mu\nu}^{antisym R/L} \equiv 2i \epsilon_{\mu\nu\delta\sigma} p^{\delta'} p^{\sigma} (c_{\nu e} \pm c_{\mu e}) \quad (IV.34)$$

Da nach Tabelle IV der hadronische Anteil $H_V^{\mu\nu 2^0}$, der den Vektoranteil des schwachen neutralen Stromes enthält, symmetrisch unter Vertauschung von μ und ν ist, verschwindet das Produkt mit dem in μ und ν antisymmetrischen Anteil (IV.34) des leptonischen Produkts bei Summation über μ und ν .
Beim Term $H_A^{\mu\nu 2^0}$, der den schwachen neutralen Axialstrom ent-

hält, ist es umgekehrt; er ist nach Tabelle IV antisymmetrisch in μ und ν , daher verschwindet sein Produkt mit dem symmetrischen Term (IV.33). Man erhält für den Anteil der Übergangswahrscheinlichkeit, die den vektoriellen schwachen Kernstrom enthält (die Indizes γ^{20} werden zur Abkürzung weggelassen):

$$L_{\mu\nu}^{R/L} H_{\nu}^{\mu\nu} = L_{\mu\nu}^{\text{sym} R/L} H_{\nu}^{\mu\nu} \quad (\text{IV.35})$$

und für denjenigen, in dem der axiale schwache Kernstrom auftritt

$$L_{\mu\nu}^{R/L} H_A^{\mu\nu} = L_{\mu\nu}^{\text{antisym.} R/L} H_A^{\mu\nu} \quad (\text{IV.36})$$

Zu der paritätsverletzenden Asymmetrie in der Übergangswahrscheinlichkeit führen diejenigen Anteile von (IV.35) und (IV.36), deren Vorzeichen von der Longitudinalpolarisation der Elektronen abhängt. Wie erwartet enthalten diese Terme nach (IV.33) und (III.34) das Produkt aus leptonischem Axial- und hadronischem Vektorstrom oder aus leptonischem Vektor- und hadronischem Axialstrom (s. Gleichung (II.26)). Durch Einsetzen von (IV.33) bzw. (IV.34) und der hadronischen Werte aus Tab. IV ergibt sich nach einigen algebraischen Umformungen für (IV.35) analog zum elektromagnetischen Ausdruck (IV.15)

$$L_{\mu\nu}^{R/L} H_{\nu}^{\mu\nu} = 2(c_{ve} \pm c_{\nu e}) (\delta_{\nu}^{20} V_L + 2 C_{\nu}^{20} V_T) \quad (\text{IV.37})$$

und für (IV.36)

$$L_{\mu\nu}^{R/L} H_A^{\mu\nu} = 4(c_{\nu e} \pm c_{ve}) C_A^{20} A_T \quad (\text{IV.38})$$

Dabei sind die hadronischen Anteile $B_V^{2^0}$, $C_V^{2^0}$, $C_A^{2^0}$ durch die Gleichungen (IV.24), (IV.25) und (IV.30) gegeben. Erwartungsgemäß wird die Kinematik des Anteils der Übergangswahrscheinlichkeit (IV.37), der den vektoriellen schwachen Kernstrom enthält, von den gleichen leptonischen Faktoren V_L und V_T (IV.16) und (IV.17) bestimmt wie im elektromagnetischen Fall. $H_A^{\mu\nu}$ besteht nur aus transversalen Termen, der zugehörige leptonische Faktor A_T hat eine andere, aber ähnliche θ -Abhängigkeit:

$$A_T \equiv -2 E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (V.39)$$

Für die gesamte Übergangswahrscheinlichkeit erhält man daher aus (IV.37) und (IV.38)

$$\overline{T_f^r T_i^{2^0 R/L}} = \frac{G\alpha}{12\pi^3 q^2} \left\{ (C_{Ve} \pm C_{Ae}) (B_V^{2^0} V_L + 2 C_V^{2^0} V_T) + \right. \\ \left. + 2 (C_{Ae} \pm C_{Ve}) C_A^{2^0} A_T \right\} \quad (IV.40)$$

mit dem paritätsverletzenden Anteil

$$(\overline{T_f^r T_i^{2^0}})_{P.V.}^{R/L} = \pm \frac{G\alpha}{12\pi^3 q^2} \left\{ C_{Ae} (B_V^{2^0} V_L + 2 C_V^{2^0} V_T) + \right. \\ \left. + 2 C_{Ve} C_A^{2^0} A_T \right\} \quad (IV.41)$$

Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt ergibt sich nach (III.7)

$$\frac{d\sigma^{2^0 R/L}}{d\Omega} = \frac{1}{(2I+1)} \frac{G\alpha}{12^4 m_A^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2} \left\{ (C_{Ve} \pm C_{Ae}) [\langle I' || \hat{T}_Y^r || I \rangle \langle I' || \hat{T}_Y^{2^0} || I \rangle^* \right. \\ \cdot (\cos^2 \frac{\theta}{2} + \langle I' || \hat{T}_Y^{el r} || I \rangle \langle I' || \hat{T}_Y^{el 2^0} || I \rangle^* + \langle I' || \hat{T}_Y^{mag r} || I \rangle \langle I' || \hat{T}_Y^{mag 2^0} || I \rangle^*) \\ \cdot \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \frac{\theta}{2})] - (C_{Ae} \pm C_{Ve}) (\langle I' || \hat{T}_Y^{el r} || I \rangle \langle I' || \hat{T}_A^{mag 2^0} || I \rangle^* + \\ \left. + \langle I' || \hat{T}_Y^{mag r} || I \rangle \langle I' || \hat{T}_A^{el 2^0} || I \rangle^*) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (IV.42)$$

und mit den speziellen Auswahlregeln der elastischen Streuung aus Tabelle IIIa:

$$\frac{d\sigma^{20R/L}}{d\Omega} = \frac{R}{(2I+1)} \frac{G\alpha}{(4\pi A^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})} \frac{1}{2} \left\{ (C_{ve} \pm C_{ae}) \left[\langle I \| \hat{T}_q^r \| I \rangle \langle I \| \hat{T}_{q\nu}^{20} \| I \rangle \right. \right. \\ \left. \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} + \langle I \| \hat{T}_q^{40r} \| I \rangle \langle I \| \hat{T}_{q\nu}^{40} \| I \rangle^* \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}) \right] - \\ \left. - (\pm C_{ve} + C_{ae}) \langle I \| \hat{T}_q^{40r} \| I \rangle \langle I \| \hat{T}_{q\nu}^{40} \| I \rangle^* \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}. \quad (\text{IV.42a})$$

Da es nur Interferenz der elektromagnetischen mit den vektoriellen schwachen Ladungsmultipolmomenten gibt, hat der Beitrag der Ladungsmultipolmomente bis auf den Faktor $\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}$, der im Photonpropagator zusätzlich enthalten ist (s. Abschnitt III.2), die gleichen kinematischen Faktoren wie im elektromagnetischen Wirkungsquerschnitt (IV.21) bzw. (IV.21a). Wegen der Proportionalität zu $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ überwiegt er für kleinere Streuwinkel θ und verschwindet bei Rückwärtsstreuung ($\theta = \pi$). Die Streuwinkelabhängigkeit unterscheidet sich für die transversalen vektoriellen und axialen hadronischen Matrixelemente durch die Faktoren $\frac{1}{2} (1 + \sin^2 \frac{\theta}{2})$ bzw. $\sin^2 \frac{\theta}{2}$, die sich mit wachsendem θ immer mehr angleichen und für $\theta = \pi$ exakt gleich sind. Wie beim elektromagnetischen Wirkungsquerschnitt dominieren alle transversalen Beiträge für große Streuwinkel über diejenigen der "Ladungsstreuung".

IV.3.3 Asymmetrie

Durch Einsetzen der Übergangswahrscheinlichkeiten (IV.15) und (IV.40) in Gleichung (III.10) erhält man einen relativ komplizierten Ausdruck für die Asymmetrie $\tilde{A}$, der sämtliche longitudinalen und transversalen Beiträge enthält. Für elastische Streuung gilt

$$\tilde{A}(\theta) = \frac{12 G E^2}{\alpha \pi} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot \frac{\sum_j \left\{ c_{Ae} \left[\langle I \| \hat{H}_j^x \| I \rangle \langle I \| \hat{H}_j^x \| I \rangle^* \cos^2 \frac{\theta}{2} + \langle I \| \hat{T}_j^{uq} \| I \rangle \langle I \| \hat{T}_j^{uq} \| I \rangle^* \right] - c_{ve} \langle I \| \hat{T}_j^{uq} \| I \rangle \langle I \| \hat{T}_j^{uq} \| I \rangle^* \sin \frac{\theta}{2} \right\}}{\sum_j \left\{ \langle I \| \hat{H}_j^x \| I \rangle^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + \langle I \| \hat{T}_j^{uq} \| I \rangle^2 \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}) \right\}} \quad (IV.43)$$

Die Beiträge der Ladungs- und der transversalen Matrixelemente werden so definiert, daß sie sich additiv zur Gesamtasymmetrie zusammensetzen; sie enthalten den gesamten Nenner von (IV.43), im Zähler jedoch nur die Ladungs- bzw. nur die Transversalmatrixelemente:

$$\tilde{A}^H(\theta) = \frac{12 G E^2}{\alpha \pi} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot c_{Ae} \cdot \frac{\sum_j \langle I \| \hat{H}_j^x \| I \rangle \langle I \| \hat{H}_j^x \| I \rangle^* \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sum_j \left\{ \langle I \| \hat{H}_j^x \| I \rangle^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + \langle I \| \hat{T}_j^{uq} \| I \rangle^2 \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}) \right\}} \quad (IV.44)$$

$$\tilde{A}^T(\theta) = \frac{12 G E^2}{\alpha \pi} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot \frac{\sum_j \left\{ c_{Ae} \langle I \| \hat{T}_j^{uq} \| I \rangle \langle I \| \hat{T}_j^{uq} \| I \rangle^* \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}) - c_{ve} \langle I \| \hat{T}_j^{uq} \| I \rangle \langle I \| \hat{T}_j^{uq} \| I \rangle^* \sin \frac{\theta}{2} \right\}}{\sum_j \left\{ \langle I \| \hat{H}_j^x \| I \rangle^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + \langle I \| \hat{T}_j^{uq} \| I \rangle^2 \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}) \right\}}$$

und es ist

(IV.45)

$$\tilde{A}(\theta) = \tilde{A}^H(\theta) + \tilde{A}^T(\theta)$$

Für die einzelnen Beiträge (IV.44) und (IV.45) vereinfachen sich die Zusammenhänge gegenüber dem Gesamtausdruck (IV.43). Im Beitrag der Ladungsstreuung $\tilde{A}^H$ ist derjenige paritätsverletzende Anteil der Wechselwirkung isoliert, der das Produkt aus leptonischem Axial- und hadronischem Vektorstrom enthält. Da für schwere Kerne der Hauptbeitrag zur Übergangswahrscheinlichkeit von der Ladungsstreuung herrührt, überwiegt sie dort über einen weiten Winkelbereich und es besteht eine gute Möglichkeit, das Produkt $j_{\mu A}^{20} j_{\nu}^{\mu 20}$, d.h. eine Kombination der Parameter c_{21} und c_{22} aus (II.26b) bzw. die Kopplungskonstanten c_{2q} aus (II.32a) zu messen.

Im Beitrag der transversalen Momente $\tilde{A}^T$ ist sowohl $j_{\mu A}^{20} j_{\nu}^{\mu 20}$ als auch $j_{\mu \nu}^{20} j_A^{\mu 20}$ enthalten.

Der Faktor $\sin^2 \frac{\theta}{2}$ in den Gleichungen (IV.43) bis (IV.45) stammt wie oben erklärt vom Photonpropagator. Wie oben erwähnt, ist die Kinematik der beiden Terme aus (IV.45) für größere Streuwinkel, für die $\tilde{A}^T$ wichtig wird, sehr ähnlich; für $\theta=\pi$ kürzt sie sich exakt heraus:

$$\tilde{A}^T(\pi) = \frac{12 G E^2}{\alpha \pi} \cdot \frac{\sum \{ c_{1e} \langle I \| \hat{T}_Y^{\text{mag}} \| I \rangle \langle I \| \hat{T}_Y^{\text{mag}} \| I \rangle^2 - c_{1e} \langle I \| \hat{T}_Y^{\text{mag}} \| I \rangle \langle I \| \hat{T}_A^{\text{mag}} \| I \rangle \}}{\sum_j | \langle I \| \hat{T}_Y^{\text{mag}} \| I \rangle |^2}$$

(IV.46)

V. BERECHNUNG DER KERNMULTIPOLMOMENTE

Mit den Gleichungen (IV.43) bis (IV.46) ist die bei der Streuung longitudinal polarisierter Elektronen an Kernen auftretende R-L-Asymmetrie durch die reduzierten Kernmatrixelemente der verschiedenen Multipoloperatoren ausgedrückt. Diese unbekannten Matrixelemente müssen nun unter Verwendung von Modellannahmen über den Kernaufbau und den Streuprozess bestimmt werden. Sämtliche hierbei verwendeten Annahmen werden in Abschnitt V.1 zusammengestellt ⁺⁾ . In den Abschnitten V.2 bzw. V.3 werden die Matrixelemente für die Kerne mit Spin $I \neq 0$ bzw. $I = 0$ unter Verwendung der in V.1 aufgezählten Voraussetzungen berechnet. Diejenigen für die Kerne mit Spin 0 werden aus einer phänomenologischen Kernladungsdichte bestimmt und explizit angegeben, während die Matrixelemente für die Kerne mit $I \neq 0$ auf Einteilchenmatrixelemente zurückgeführt werden, deren Berechnung in Abschnitt V.4 erläutert ist.

V.1 Verwendete Näherungen, Kernmodell

Folgende Annahmen über den Kern werden verwendet:

- 1) Der Kern besteht aus A Nukleonen, deren Relativimpulse klein gegenüber ihrer Masse sind. Der Kernzustand wird daher durch eine nichtrelativistische A-Teilchenfunktion dargestellt. Im Rahmen dieser nichtrelativistischen Beschreibung befinden sich die Nukleonen auf ihrer

⁺⁾ Die Frage der Abhängigkeit vom Kernmodell wird, soweit sie die Asymmetrie betrifft, in Kap. VI (Abschnitt VI.2.1) ausführlich diskutiert.

Massenschale, d.h. die Bindungsenergie des einzelnen Nukleons ($\leq 8\text{MeV}$) wird gegenüber seiner Masse vernachlässigt; daher können die in den Einteilchenmatrixelementen auftretenden Nukleonenzustände durch freie Diracspinoren dargestellt werden.

- 2) Zur Abschätzung der Asymmetrie werden die Kerne durch ihren Grundzustand dargestellt.
- 3) Die Kerne ${}^3\text{H}$ und ${}^3\text{He}$ besitzen im Grundzustand den Spin $1/2$, alle drei Nukleonen haben den Bahndrehimpuls $l = 0$ und daher den Gesamtspin $j = 1/2$. Der Spinanteil des A-Teilchenzustandes wird durch explizite Kopplung im 3-Nukleonensystem bestimmt. Wie sich zeigen wird, gehen die Annahmen über die Ortsanteile für diese Kerne nicht in die Asymmetrie ein. Zur Berechnung der absoluten Übergangsraten werden die Ortsanteile durch Oszillatorfunktionen $R_{nl}(x)$ dargestellt (es werden die zum Zustand $n l_{1/2} = 1 s_{1/2}$ gehörigen R_{10} verwendet). (52)

Die Kernschwerpunktsbewegungen, von denen nicht von vornherein klar ist, daß sie vernachlässigt werden können, werden durch den Faktor $e^{-\frac{AR^2}{2a^2}}$ in den Kernwellenfunktionen berücksichtigt (53), (54), wobei R der Kernschwerpunktvektor ist. In den in den Übergangsamplituden auftretenden Radialmatrixelementen bewirkt diese Korrektur gegenüber den einfachen Schalenmodell-Ausdrücken einen zusätzlichen Faktor $e^{\frac{(1/2)^2}{2} A}$ (54), der sich bei der

Berechnung der Asymmetrie jedoch wieder herauskürzt ^{+) .}

Die Oszillatorparameter a_0 können aus den mittleren quadratischen Kernradien $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ berechnet werden.

Für ${}^3\text{H}$ wurden die in Ref. (55) und für ${}^3\text{He}$ die in Ref. (56) angegebenen Werte benutzt.

- 4) Die schweren Kerne mit Spin $\neq 0$, ${}^{41}\text{Ca}$ und ${}^{209}\text{Bi}$, werden mit Hilfe des Schalenmodells beschrieben. Sie besitzen im Grundzustand je ein Valenznukleon: ${}^{41}\text{Ca}$ ein Neutron im Zustand $nl_j = 1f_{7/2}$ und ${}^{209}\text{Bi}$ ein Proton mit $nl_j = 1h_{9/2}$. Die Ortsfunktionen dieser Valenznukleonen werden ebenfalls durch die entsprechenden Oszillatorfunktionen $R_{13}(x)$ und $R_{15}(x)$ dargestellt. Die Oszillatorparameter a_0 bzw. die mittleren quadratischen Radien wurden für ${}^{41}\text{Ca}$ Ref. (57) und für ${}^{209}\text{Bi}$ Ref. (58) entnommen.

Die Spins und Bahndrehimpulse der übrigen A-1 Nukleonen sind zu 0 gekoppelt. Der Zustand dieser unteren Schalen wird für ${}^{41}\text{Ca}$ wie der Grundzustand eines ${}^{40}\text{Ca}$ -Kerns und für ${}^{209}\text{Bi}$ wie ein ${}^{208}\text{Pb}$ -Kern im Grundzustand behandelt (s. Punkt 5 unten). Der gesamte Kernzustand wird als das Produkt aus dem Zustand der unteren Schalen und demjenigen des Valenznukleons dargestellt, die Kernspin-Quantenzahlen I, M_I werden durch diejenigen des Valenz-

+) Der Faktor $\epsilon^{(1/2)^2/A}$ in den Kernmatrixelementen ist der wichtigste Teil der Korrekturen der Kern-Schwerpunktsbewegung. Darüber hinausgehende Korrekturen wurden in dieser Arbeit berechnet; dabei zeigte sich, daß diese auch für die Kerne ${}^3\text{H}$ und ${}^3\text{He}$, bei denen der Einfluß der Schwerpunktsbewegung am größten ist, vernachlässigbar klein sind.

nukleons j, m_j festgelegt:

$$|A\rangle = |(00)_{(A-1)} \rangle |(\hbar(\frac{1}{2}) j m_j)_{(A)} \rangle$$

$$I = j \quad ; \quad M_I = m_j \quad (V.1)$$

- 5) Nach Ref. (29) gehen die Annahmen über die Kerneigenschaften für Kerne mit Spin 0 in erster Bornscher Näherung nicht in die Asymmetrie ein. Zur Berechnung der absoluten Übergangsraten werden für die hier betrachteten Spin-0-Kerne ^{12}C , ^{40}Ca und ^{208}Pb folgende Annahmen gemacht:

Es wird eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung angenommen; speziell wird eine zweiparametrische Fermi-Verteilung

$$\rho(x) = \rho_1 \left(1 + e^{(x-z_1)/z_1} \right)^{-1} \quad (V.2)$$

verwendet. Dabei ist (59)

$$\rho_1 = \frac{3Z}{4\pi c^3} \left[1 + \left(\frac{z_1 \pi}{c} \right)^2 + O \left(\frac{z_1}{c} \right)^3 \right]^{-1} \quad (V.2a)$$

Der Parameter c gibt die "Halbwertsbreite" der Ladungsverteilung (100 % - 50 %-Abstand) an, z_1 hängt über

$$z_1 = \frac{T}{4\gamma} \quad (V.2b)$$

mit der Oberflächendicke T (dem 90% - 10 %-Abstand) (60) zusammen. Die Parameter c und T sind aus Ref. (61) entnommen.

Die in den Punkten 3) bis 5) genannten Kerneigenschaften sind in Tabelle V noch einmal zusammengestellt.

Die folgende Annahme betrifft den Streuvorgang:

- 6) Für alle betrachteten Kerne wird der Streuprozess im Rahmen der Stoßnäherung beschrieben (1a), (1b), (62) d.h. die Streuung wird als eine Überlagerung von A einzelnen Streuprozessen am Nukleon aufgefasst. Der Kernstrom $\hat{j}_N$

kann dann als Summe über die einzelnen Nukleonenströme

$\hat{J}_{\mu(i)}$ ausgedrückt werden:

$$\hat{J}_{\mu} = \sum_{i=1}^A (\hat{J}_{\mu(i)} \times \mathbb{1}_{(A-1)i}) \quad (V.3)$$

Die Indizes in Klammern weisen dabei auf den Raum hin, in dem die Operatoren wirken: $\hat{J}_{\mu(i)}$ wirkt im Hilbertraum des i-ten Nukleons, während der Eins-Operator in dem von den jeweils übrigen A-1 Nukleonen aufgespannten Raum wirkt.

Austauschströme zwischen den Nukleonen werden durch die Annahme (V.3) nicht berücksichtigt; ihre Effekte können jedoch vernachlässigt werden^(1a).

Der Bindungszustand der Nukleonen geht über die Kernwellenfunktionen, die mit Hilfe der Voraussetzungen 1) bis 4) bestimmt werden können, in die Streuamplitude ein.

Tab. V : Kerneigenschaften

Kern	${}^1_2\text{H}$	${}^3_2\text{H}$	${}^3_1\text{H}$	${}^4_2\text{He}$	${}^{16}_8\text{O}$	${}^{40}_{20}\text{Ca}$	${}^{160}_{80}\text{Hg}$
Masse ⁺⁾	m_A (g/mol)	2,015	3,016	4,0026	15,9949	39,9626	159,908
Spin	I	1/2	1/2	0	0	7/2	0
Zust. der Valenznukleonen	$(1s_{1/2})^3$	$(1s_{1/2})^2$	$(1s_{1/2})^2$			$(1f_{7/2})^1$	$(1h_{9/2})^1$
Ortswellenfunktion der Valenznukleonen	R_{10}	R_{10}				P_{10}	P_{10}
rms-Radius r (fm)	1,72	1,93				4,14	5,12
Parameter der Fermiverteilung				2,30	2,60		
				2,20	2,55		

⁺⁾ Die Angaben zur Kernmasse stammen aus Ref. (63)

V.2 Zurückführung der Kernmultipolmomente auf Einteilchen- matrixelemente

V.2.1 Ortsdarstellung

In Ortsdarstellung lautet das Kernstrommatrixelement

$$\begin{aligned} \langle A' | \hat{J}_\mu(\vec{x}) | A \rangle = & \int d^3x_1' \dots d^3x_{A'} d^3x_1 \dots d^3x_A \sum_{\substack{\vec{b}_1' \dots \vec{b}_{A'} \\ \vec{b}_1 \dots \vec{b}_A \\ \vec{g}_1 \dots \vec{g}_A}} \langle A' | \vec{x}_1' \vec{b}_1' \vec{g}_1' \dots \vec{x}_{A'} \vec{b}_{A'} \vec{g}_{A'} \\ & \cdot \vec{x}_1 \vec{b}_1 \vec{g}_1 \dots \vec{x}_A \vec{b}_A \vec{g}_A | \hat{J}_\mu(\vec{x}) | \vec{x}_1 \vec{b}_1 \vec{g}_1 \dots \vec{x}_A \vec{b}_A \vec{g}_A \rangle \langle \vec{x}_1 \vec{b}_1 \vec{g}_1 \dots \vec{x}_A \vec{b}_A \vec{g}_A | A \rangle \end{aligned} \quad (V.4)$$

In der Stoßnäherung (Voraussetzung 6. aus Abschnitt V.1)

gilt

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}_1 \vec{b}_1 \vec{g}_1 \dots \vec{x}_A \vec{b}_A \vec{g}_A | \hat{J}_\mu(\vec{x}) | \vec{x}_1 \vec{b}_1 \vec{g}_1 \dots \vec{x}_A \vec{b}_A \vec{g}_A \rangle = \\ = \langle \vec{x}_1 \vec{b}_1 \vec{g}_1 \dots \vec{x}_A \vec{b}_A \vec{g}_A | \sum_{i=1}^A (\hat{J}_{\mu(i)}(\vec{x}) \times \mathbb{1}_{(A-1)i}) | \vec{x}_1 \vec{b}_1 \vec{g}_1 \dots \vec{x}_A \vec{b}_A \vec{g}_A \rangle = \\ = \sum_{i=1}^A \langle \vec{x}_i \vec{b}_i \vec{g}_i | \hat{J}_{\mu(i)}(\vec{x}) | \vec{x}_i \vec{b}_i \vec{g}_i \rangle \prod_{j \neq i} \delta(\vec{x}_j' - \vec{x}_j) \delta_{\vec{b}_j' \vec{b}_j} \delta_{\vec{g}_j' \vec{g}_j} \end{aligned} \quad (V.5)$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \langle A' | \hat{J}_\mu(\vec{x}) | A \rangle = \sum_{i=1}^A \int d^3x_i' d^3x_1 \dots d^3x_A \sum_{\substack{\vec{b}_i' \\ \vec{b}_1 \dots \vec{b}_A \\ \vec{g}_1 \dots \vec{g}_A}} \langle A' | \vec{x}_1 \vec{b}_1 \vec{g}_1 \dots \vec{x}_i \vec{b}_i \vec{g}_i \dots \vec{x}_A \vec{b}_A \vec{g}_A \\ & \cdot \vec{x}_i \vec{b}_i \vec{g}_i | \hat{J}_{\mu(i)}(\vec{x}) | \vec{x}_i \vec{b}_i \vec{g}_i \rangle \langle \vec{x}_1 \vec{b}_1 \vec{g}_1 \dots \vec{x}_A \vec{b}_A \vec{g}_A | A \rangle \end{aligned} \quad (V.6)$$

Eine analoge Gleichung ergibt sich für die gesuchten Kern-
matrixelemente der Multipoloperatoren (IV.3), (IV.6) und
(IV.7). Es ist :

$$\hat{X}_{\mu H} = \sum_{i=1}^A (\hat{X}_{\mu H(i)} \times \mathbb{1}_{(A-1)i}) \quad (V.7)$$

Dabei steht $\hat{X}_{\mu H}$ für die Multipoloperatoren $\hat{H}_{\mu H}$, $\hat{T}_{\mu H}^{mag}$

und $\hat{T}_{HN}^{el}$; die Einteilchenoperatoren $\hat{X}_{HN(i)}$ ergeben sich aus den Gleichungen (IV.3), (IV.6) und (IV.7) jeweils durch Ersetzen des gesamten Kernstroms $\hat{j}_K$ durch den Einteilchenstrom $\hat{j}_{HN(i)}$. Eine zur obigen Rechnung analoge Betrachtung für die Matrixelemente von (V.7) führt zu der Gleichung

$$\begin{aligned} \langle A' | \hat{X}_{HN} | A \rangle &= \sum_{i=1}^A \int d^3x_i' d^3x_1 \dots d^3x_A \sum_{\substack{\vec{b}_1' \dots \vec{b}_A \\ g_1' \dots g_A}} \langle A' | \vec{x}_1 \vec{b}_1 g_1 \dots \vec{x}_i' \vec{b}_i' g_i' \dots \vec{x}_A \vec{b}_A g_A \rangle \cdot \\ &\cdot \langle \vec{x}_i' \vec{b}_i' g_i' | \hat{X}_{HN(i)} | \vec{x}_i \vec{b}_i g_i \rangle \langle \vec{x}_1 \vec{b}_1 g_1 \dots \vec{x}_A \vec{b}_A g_A | A \rangle \quad (V.8) \end{aligned}$$

Für die gesuchten reduzierten Matrixelemente gilt

$$\langle I || \hat{X}_N || I \rangle = \omega(I', H_I', I, H_I, \eta, H) \langle A' | \hat{X}_{HN} | A \rangle; \quad (V.9)$$

der hierbei auftretende Ausdruck $\omega(I', H_I', I, H_I, \eta, H)$ ist in (IV.10) definiert.

Die $\langle \vec{x}_i' \vec{b}_i' g_i' | \hat{j}_{HN(i)} | \vec{x}_i \vec{b}_i g_i \rangle$ bzw. die $\langle \vec{x}_i' \vec{b}_i' g_i' | X_{HN(i)} | x_i \vec{b}_i g_i \rangle$ aus Gleichung (V.6) bzw. (V.8) sind Operatoren im Kern-Ortsraum. Nach Voraussetzung 1 aus Abschnitt V.1 können sie aus der Ortsdarstellung der freien Einteilchenmatrixelemente, deren Impulsdarstellung in (II.5) bzw. (II.19) gegeben ist, bestimmt werden. Ihre Berechnung unter Verwendung einer nichtrelativistischen Näherung wird in den Abschnitten V.4.1 und V.4.2 erläutert. Drückt man noch die Kernzustände $\langle \vec{x}_1 \vec{b}_1 g_1 \dots \vec{x}_A \vec{b}_A g_A | A \rangle$ in (V.8) unter Verwendung eines Kernmodells durch die einzelnen Nukleonzustände $\langle \vec{x}_i \vec{b}_i | N(i) \rangle = \langle \vec{x}_i \vec{b}_i | (n(\ell \frac{1}{2}) j m_j)_{i\alpha} \rangle$ aus, so sind die Kernmatrixelemente durch (V.8) auf Einteilchenmatrixelemente zurückgeführt; die gesuchten reduzierten Kernmatrixelemente $\langle I || \hat{X}_N || I \rangle$ werden

durch die reduzierten Matrixelemente der Einteilchen-Multipoloperatoren $\hat{X}_{qH}(i)$ zwischen gebundenen Nukleonenzuständen und durch Drehimpulsfaktoren ausgedrückt, die die Kopplung des i-ten Teilchens mit den A-1 übrigen Teilchen zum Kernspin I enthalten. Die Matrixelemente der Multipoloperatoren für Einteilchenzustände sind durch die zu

(V.9) analoge Gleichung

$$\begin{aligned} \langle (n(\lambda \frac{1}{2}) j)_{(i)} \| \hat{X}_{qH}(i) \| (n(\lambda \frac{1}{2}) j)_{(i)} \rangle &= W(j, u_j, j, u_j, q, H) \cdot \\ &\cdot \int d^3x_i d^3x_i \sum_{\vec{b}_i, \vec{b}_i} \langle N_{(i)} | \vec{x}_i \vec{b}_i \rangle \langle \vec{x}_i \vec{b}_i | \hat{X}_{qH}(i) | \vec{x}_i \vec{b}_i \rangle \langle \vec{x}_i \vec{b}_i | N_{(i)} \rangle \end{aligned} \quad (V.10)$$

definiert; dabei ist $\langle \vec{x}_i \vec{b}_i | N_{(i)} \rangle$ die Ortsdarstellung des i-ten gebundenen Nukleonenzustandes mit der Isospinquantenzahl g_i . Die reduzierten Nukleonmatrixelemente (V.10) werden in Abschnitt V.4.2 und Anhang B berechnet.

Mit Hilfe des Wigner-Eckart Theorems können die reduzierten Kernmatrixelemente der transversalen Multipoloperatoren i.a. stark vereinfacht werden. Können z.B. A-1 Nukleonen zu einem Zustand mit Spin 0 gekoppelt werden, so verschwindet ihr Gesamtbeitrag zum transversalen Kernmatrixelement auf Grund der Dreiecksauswahlregel (IV.11a), und von der Summe über die Nukleonen in (V.9) bleibt nur das zum A-ten Nukleon gehörige Einteilchenmatrixelement übrig.

Bei den Ladungsmonopolmomenten heben sich die Beiträge einzelner Nukleonen nicht auf, die Summe über die A verschiedenen Terme muß explizit ausgeführt werden.

Bevor jedoch die speziellen Kernzustände (nach Vor. 3 bis 4 aus Abschnitt V.1) eingesetzt werden, wird gezeigt, wie sich die Vektoranteile der schwachen Ladungsmatrixelemente aus den

entsprechenden elektromagnetischen Matrixelementen bestimmen lassen:

Da die Kernladung sich aus den Nukleonladungen zusammensetzt, unterscheiden sich die Vektoranteile der schwachen neutralen und die elektromagnetischen Kernmatrixelemente der Ladungsdichte

$$\rho_v^{\{\tau^0\}} \equiv \langle A' | j_{0v}^{\{\tau^0\}} | A \rangle \quad (V.11)$$

ebenso wie die einzelnen Nukleonmatrixelemente nur durch die Nukleonformfaktoren. Auf Grund von CVC und mit den Annahmen aus Kapitel II ist die q^2 -Abhängigkeit aller auftretenden Nukleonformfaktoren dieselbe. Daher ist das Verhältnis der schwachen vektoriellen zu den elektromagnetischen Kernladungsmatrixelementen bestimmt durch das Verhältnis der entsprechenden Nukleonformfaktoren an der Stelle $q^2 = 0$. Dies zeigt sich sofort durch Einsetzen der Einteilchenmatrixelemente (V.44), (V.45) in die Gleichung für die Kernstromdichte (V.6). Da bei Ladungsstreuung keine Änderung der Spineinstellungen stattfindet, ergibt sich

$$\rho_v^{\{\tau^0\}}(\vec{x}) = \int d^3x_1 \dots d^3x_A \delta(\vec{x}_i - \vec{x}) \cdot \\ \cdot |\psi(\vec{x}_1 \bar{b}_1 s_1 \dots \vec{x}_A \bar{b}_A s_A)|^2 \cdot \sum_{i=1}^A F_{i(i)}^{\{\tau^0\}} \quad (V.12)$$

Dabei ist $\psi(\vec{x}_1 \bar{b}_1 s_1 \dots \vec{x}_A \bar{b}_A s_A)$ die nichtrelativistische Kernwellenfunktion, die bereits die richtige Spin-Isospin-Kopplung enthält (daher wird in (V.12) nicht mehr über $\bar{b}_1, \bar{b}_A$ und s_1, s_A summiert). Die $F_{i(i)}^{\{\tau^0\}}$ sind die in (II.9) definierten Isospin matrixelemente (Nukleonformfaktoren) an der Stelle

$q^2 = 0$. Bei der Ableitung von (V.12) wurde ausgenutzt, daß die Kerndichte $|\psi(\vec{x}_1 \vec{\sigma}_1 \vec{g}_1 \dots \vec{x}_A \vec{\sigma}_A \vec{g}_A)|^2$ nach dem Pauliprinzip symmetrisch unter Vertauschung zweier Sätze von Nukleonkoordinaten $\vec{x}_i \vec{\sigma}_i \vec{g}_i$ und das Integral in (V.12) somit vom Teilchenindex (i) unabhängig ist und vor die Summe über i gezogen werden kann.

[Zur Erläuterung von (V.12) wird durch Integration über $\vec{x}$ die Kernladung berechnet (Normierung s. (A.1)) :

$$2eQ \equiv \int d^3x \rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^A F_{1(i)} \int d^3x_1 \dots d^3x_A |\psi(\vec{x}_1 \vec{\sigma}_1 \vec{g}_1 \dots \vec{x}_A \vec{\sigma}_A \vec{g}_A)|^2 \quad (V.13)$$

Für die elektromagnetische Ladung ergibt sich hieraus durch Einsetzen der expliziten Werte für die $F_{1(i)}^\gamma$ (II.10) und mit der Normierung (A.1)

$$Q^\gamma = Z \quad (V.14)$$

Daß nur die Protonen zur elektromagnetischen Ladung beitragen, hat seinen Grund im Verschwinden der $F_{1(i)}^\gamma$ für Neutronen ($i=n$); $\sum_{i=1}^A F_{1(i)}^\gamma$ hat nur Z nicht verschwindende Terme. Die $F_{1(i)}^{z^0}$ sind jedoch in den meisten Modellen der schwachen Wechselwirkung sowohl für Protonen als auch für Neutronen von 0 verschieden^{+) ,} sodaß alle Nukleonen schwache Ladung tragen.]

Aus (V.12) folgt die erwartete Beziehung

$$\frac{\rho_v^{z^0}(\vec{x})}{\rho^\gamma(\vec{x})} = \frac{\sum_{i=1}^A F_{1(i)}^{z^0}}{\sum_{i=1}^A F_{1(i)}^\gamma} \equiv F \quad (V.15)$$

und mit den expliziten Werten für die $F_{1(i)}^\gamma$ (II.25)

$$F = \frac{Z F_{1(p)}^{z^0} + N F_{1(n)}^{z^0}}{Z} = F_{1(p)}^{z^0} + \frac{N}{Z} F_{1(n)}^{z^0} \quad (V.16)$$

+) Dies gilt z.B. nicht für das Standardmodell mit dem Parameter $\sin^2 \theta_w = 0,25$. In diesem Fall verschwinden nach (II.21) die $F_{1(i)}^{z^0}$ für Protonen ($i=p$)

Durch Einsetzen von (V.12) in die Gleichung für die Ladungsmultipolmomente (IV.3) ergibt sich unter Verwendung der Beziehung (IV.10) für die gesuchten reduzierten Multipolmatrixelemente

$$\begin{aligned} \langle I \| \hat{H}_q \| I \rangle &= W(I, M_I, I, M_I, q, M) \cdot \sum_{i=1}^A F_{1(i)} \int d^3x \, Y_{1M}(q_x, q_x) \cdot \\ &\cdot j_1(qx) \int d^3x_1 \dots d^3x_A \delta^3(\vec{x}_i - \vec{x}) |\psi(\vec{x}_1 \vec{b}_1 g_1 \dots \vec{x}_A \vec{b}_A g_A)|^2 \\ &= W(I, M_I, I, M_I, q, M) \cdot \sum_{i=1}^A F_{1(i)} \int d^3x_1 \dots d^3x_A Y_{1M}(q_x, q_x) \cdot \\ &\cdot j_1(qx_i) |\psi(\vec{x}_1 \vec{b}_1 g_1 \dots \vec{x}_A \vec{b}_A g_A)|^2 \end{aligned} \quad (V.17)$$

und es gilt die zu (V.15) analoge Gleichung

$$\frac{\langle I \| \hat{H}_{20}^{20} \| I \rangle}{\langle I \| \hat{H}_0^0 \| I \rangle} = F \quad (V.18)$$

Da für Kerne mit Spin 0 nur die Ladungsmonopolmomente existieren, kann aus (V.18) sofort geschlossen werden, daß die Asymmetrie, deren erste Bornsche Näherung dann im wesentlichen durch einen Quotienten vom Typ (V.18) gegeben ist, von allen Annahmen über die Kerneigenschaften, die bei der Berechnung der Multipolmomente verwendet werden, unabhängig ist. Die einzelnen Matrixelemente $\langle 0 \| M_0^{\{2\}} \| 0 \rangle$ werden jedoch zur Bestimmung der absoluten Übergangsraten benötigt und werden daher mit Hilfe der Annahme 5 aus Abschnitt V.1 in Abschnitt V.3 berechnet.

Eine ähnliche Gleichung wie (V.18) gilt für die Vektoranteile der einzelnen transversalen Multipolmomente. Dies wird bei der folgenden Untersuchung der Spezialfälle der betrachteten Kerne gezeigt.

V.2.2 Die Kerne ${}^3\text{H}$ und ${}^3\text{He}$

Für die 3-Nukleonensysteme kann die Drehimpulskopplung in

der Wellenfunktion $\Psi(\vec{x}_1 \vec{e}_1 g_1, \vec{x}_2 \vec{e}_2 g_2)$ explizit ausgeführt werden.

Von den Ladungsmultipolmomenten existiert nur das Matrixelement des Monopoloperators (s. Tab. IIIa), und zu seiner Berechnung wird nach (V.17) nur die Kerndichte $|\Psi|^2$ benötigt.

Unter Verwendung der Beziehung

$$W(I, M_I, I, M_I, 0, 0) = (-1)^{I-M_I} \begin{pmatrix} I & 0 & I \\ -M_I & 0 & M_I \end{pmatrix}^{-1} = \sqrt{2I+1} \quad (\text{V.19})$$

erhält man das gesuchte Kernmatrixelement als Summe über die drei Nukleonmatrixelemente (52)

$$\langle \frac{1}{2} \| \hat{H}_0 \| \frac{1}{2} \rangle = \sqrt{2} \sum_{i=1}^3 \langle N(i) \| \hat{H}_{0(i)} \| N(i) \rangle \quad (\text{V.20})$$

$$\equiv \sqrt{2} \sum_{i=1}^3 \langle (n(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\frac{1}{2}})_{(i)} \| \hat{H}_{0(i)} \| (n(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\frac{1}{2}})_{(i)} \rangle$$

Dabei sind die $\hat{H}_{0(i)}$ die in (V.7) definierten Einteilchenoperatoren. Ihre reduzierten Matrixelemente $\langle N(i) \| \hat{H}_{0(i)} \| N(i) \rangle$ sind in (B.1) gegeben. Durch Einsetzen der speziellen Quantenzahlen der Kerne ${}^3\text{H}$ und ${}^3\text{He}$ aus Tabelle V folgt aus (B.1)

$$\begin{aligned} \langle N(i) \| \hat{H}_{0(i)}^{\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}} \| N(i) \rangle &\equiv \langle (1(s\frac{1}{2})\frac{1}{2})_{(i)} \| \hat{H}_{0(i)}^{\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}} \| (1(s\frac{1}{2})\frac{1}{2})_{(i)} \rangle \\ &= F_{1(i)}^{\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (10/j_0(qx)/10) \end{aligned} \quad (\text{V.21})$$

wobei $(10/j_0(qx)/10)$ das in (B.7) definierte Radialintegral ist. Über die in $(10/j_0/10)$ auftretenden Radialfunktionen der Nukleonzustände sind noch keine Annahmen gemacht worden.

Die transversalen Matrixelemente verschwinden nach Tab. IIIa bis auf die Dipolmomente. Die Spin-Isospinkopplung im 3-Nukleonensystem in Verbindung mit dem Pauliprinzip führt zu dem bekannten Ergebnis, daß sich die Beiträge der beiden identischen Nukleonen zu den transversalen Dipolmatrixelementen aus Gründen der Drehimpulsinvarianz absättigen. (52)

Die Summe über die Nukleonen in den Kernmatrixelementen (V.8) reduziert sich daher erwartungsgemäß auf den einen Beitrag des unpaarigen Nukleons; die reduzierten Kernmatrixelemente stimmen mit den entsprechenden Einteilchenmatrixelementen überein und können für $\hat{T}_{yV}^{mag}$ nach den Gleichungen (B.2) bis (B.7) und für $\hat{T}_{yA}^{el}$ nach (V.48)

, berechnet werden. Das in (B.5) auftretende Wignersche 6-j-Symbol $\left\{ \begin{matrix} l & j & \frac{1}{2} \\ j & l & j \end{matrix} \right\}$ verschwindet für $J = 1$ und die speziellen Drehimpulsquantenzahlen der Kerne ${}^3\text{H}$ und ${}^3\text{He}$. (49)

Das Gleiche gilt für das in (B.6) auftretende 9-j-Symbol (49)

$$\left\{ \begin{matrix} l & l & j+1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ j & j & j \end{matrix} \right\}.$$

Daher vereinfachen sich die Gleichungen (B.2) bzw. (V.48) für die transversalen Einteilchen-Dipolmomente in diesem Fall und man erhält für die Kernmatrixelemente

$$\langle \frac{1}{2} \| \hat{T}_{1V}^{mag} \{ \begin{matrix} 3^0 \\ j \end{matrix} \} \| \frac{1}{2} \rangle = \mu_{V(A)}^{3^0} \cdot \frac{e q}{2 I \pi m_N} (10 | j_0(qx) | 10) \quad (V.22)$$

$$\langle \frac{1}{2} \| \hat{T}_{1A}^{el} \{ \begin{matrix} 2^0 \\ j \end{matrix} \} \| \frac{1}{2} \rangle = \mu_{A(A)}^{2^0} \cdot \frac{e}{I \pi} (10 | j_0(qx) | 10) \quad (V.23)$$

Der Index in Klammern (A) bezeichnet das jeweilige A-te Nukleon, das Valenznukleon des Kerns, und ist nicht zu verwechseln mit dem Index A, der den axialen Anteil der schwachen neutralen Größen kennzeichnet. Das Verhältnis des vektoriellen schwachen neutralen zum elektromagnetischen Dipolmoment ist wie im Fall der Ladungsmultipolmomente unabhängig von der Kernstruktur und es gilt die zu (V.18) analoge

$$\frac{\langle \frac{1}{2} \parallel \hat{T}_1^{\text{mag}} q^2 \parallel \frac{1}{2} \rangle}{\langle \frac{1}{2} \parallel \hat{T}_1^{\text{mag}} \parallel \frac{1}{2} \rangle} = \frac{\mu_V^{2^0}(A)}{\mu^r(A)} \quad (\text{V.24})$$

Die q-Abhängigkeit des axialen Kerndipolmomentes (V.23) wird nur durch das Radialintegral und die in den Formfaktoren enthaltene Funktion $\mathcal{F}(q^2)$ (II.7) bestimmt, während die vektoriellen Matrixelemente (V.22) zusätzlich proportional zu q sind. Daher, und wegen der unterschiedlichen kinematischen Faktoren, mit denen die vektoriellen und axialen hadronischen Matrixelemente in der Übergangswahrscheinlichkeit multipliziert werden (Gleichungen (IV.17) und (IV.39)), wird der Beitrag von (V.23) zur Übergangsrate im Bereich größerer Streuwinkel, wo er wichtig wird, gegenüber demjenigen von (V.22) etwas unterdrückt. Die Kopplungskonstante des hadronischen Axialstroms wird daher schwieriger zu bestimmen sein; das q-Verhalten der Asymmetrie wird aus den gleichen Gründen geringfügig von der Abschätzung (III.16) abweichen.

Da in diesem einfachen Kernmodell ebenso wie bei der Streuung am einzelnen Nukleon nur die Einteilchen-Dipolmatrixelemente auftreten, sind in diesem Modell die magnetischen Momente der Kerne mit Spin 1/2 und der Nukleonen gleich, d.h. der Beitrag der Transversalmomente zur Asymmetrie $\tilde{A}^r$

für ${}^3\text{H}$ und ${}^3\text{He}$ stimmt mit demjenigen für die Nukleonen überein und die Gesamtasymmetrie $\tilde{A}$ wird in Rückwärtsstreuung exakt gleich. Das ist natürlich nicht mehr der Fall, wenn die d-Wellenbeimischung in den Kerzuständen oder Austauschbeiträge berücksichtigt werden.

In allen nicht verschwindenden Multipolmomenten der Kerne ${}^3\text{H}$ und ${}^3\text{He}$ ((V.20), (V.22), (V.23)) tritt das gleiche Radialintegral $(10|j_0|10)$ auf. Es wird sich daher bei der Bildung des Quotienten für die Asymmetrie herauskürzen, sodaß zur Berechnung von $\tilde{A}$ keine Annahmen über die Radialfunktionen gemacht werden müssen.

V.2.3 Die Kerne ${}^{41}\text{Ca}$ und ${}^{209}\text{Bi}$

Unter Verwendung von Voraussetzung 4 aus Abschnitt V.1 können die Kernmatrixelemente folgendermaßen geschrieben werden

$$\langle A' | \hat{X}_{3H} | A \rangle = \langle 00 | \sum_{i=1}^{A-1} \hat{X}_{3H(i)} | 00 \rangle \delta_{m_i' m_i} + \langle n(\lambda \frac{1}{2}) j m_i \rangle_{(A)} \hat{X}_{3H(A)} | n(\lambda \frac{1}{2}) j m_i \rangle_{(A)} \\ j = I ; m_i = M_I ; m_i' = M_I' \quad (\text{V.25})$$

Für die reduzierten Matrixelemente folgt mit Hilfe von (IV.10)

$$\langle I || \hat{X}_3 || I \rangle = (-1)^{I-M_I'} \begin{pmatrix} I & 3 & I \\ -M_I' & 0 & M_I \end{pmatrix}^{-1} \langle 0 || \sum_{i=1}^{A-1} \hat{X}_{3(i)} || 0 \rangle \\ + \langle n(\lambda \frac{1}{2}) I \rangle_{(A)} || \hat{X}_{3(A)} || \langle n(\lambda \frac{1}{2}) I \rangle_{(A)} \quad (\text{V.26})$$

Der erste Term auf der rechten Seite von (V.26)

verschwindet nach der Drehimpulsauswahlregel (IV.11)

für $J \neq 0$ und $M \neq 0$; zwischen allen Spin-0-Zuständen existiert nur das Ladungsmonopolmoment. Die unteren Schalen tragen also nur durch Ladungsstreuung zur Streuamplitude bei.

Die Matrixelemente des jeweiligen Valenznukleons $\langle (n(\lambda_2^1)I)_{(\lambda)} \| \hat{T}_{\lambda(\lambda)} \| (n(\lambda_2^1)I)_{(\lambda)} \rangle$ existieren in allen Partialwellen $0 \leq J \leq 2I$, d.h. für ^{41}Ca tragen 7, für ^{209}Bi tragen 9 Partialwellen zur Streuamplitude bei (S. Tab. IIIa). Da sich im Fall der Ladungsstreuung die Spinrichtung nicht ändert, kann für den 1. Term in (V. 25)

die Beziehung (V. 19) ausgenutzt werden, und man erhält

$$\langle I \| \hat{H}_3 \| I \rangle = \sqrt{2I+1} \langle 0 \| \sum_{i=1}^{A-1} \hat{H}_{0(ii)} \| 0 \rangle \delta_{\lambda_0} + \langle (n(\lambda_2^1)I)_{(\lambda)} \| \hat{H}_{3(\lambda)} \| (n(\lambda_2^1)I)_{(\lambda)} \rangle \quad (\text{V. 27})$$

$$\langle I \| \hat{T}_{\lambda} \| I \rangle = \langle (n(\lambda_2^1)I)_{(\lambda)} \| \hat{T}_{\lambda(\lambda)} \| (n(\lambda_2^1)I)_{(\lambda)} \rangle$$

für $\langle 0 \| \sum_{i=1}^A \hat{H}_{0(ii)} \| 0 \rangle$ werden die Matrixelemente der Spin-0-Kerne ^{40}Ca bzw. ^{208}Pb eingesetzt, die in Abschnitt V. 3 berechnet werden. Die Matrixelemente des Valenznukleons können für die verschiedenen Partialwellen durch Einsetzen der in Tabelle V angegebenen speziellen Quantenzahlen der Kerne ^{41}Ca bzw. ^{209}Bi aus den Gleichungen (B.1) bis (B.7) und (V.48) berechnet werden.

Der Beitrag des jeweiligen Valenznukleons zur Ladungsstreuung fällt bei den schweren Kernen gegenüber dem Effekt der unteren Schalen, der sich aus den Beiträgen sämtlicher A-1 Nukleonen zusammensetzt, kaum ins Gewicht. Die magnetische Streuung wird jedoch nur vom Valenznukleon bestimmt, in Rückwärtsrichtung können sich die Beiträge der höheren Partialwellen bemerkbar machen und den Streuquerschnitt gegenüber demjenigen der Kerne mit geringeren Spins wie z.B. ^3H und ^3He vergrößern. Allerdings wird die Asymmetrie von den Radialintegralen, die für die verschiedenen Partialwellen verschiedene Werte haben und sich daher nicht herauskürzen, abhängen.

V.3 Kerne mit Spin 0

Für die Kerne mit $I = 0$ existieren nur die Ladungsmonopolmomente.

Die elektromagnetische Ladungsdichte

ist für diese Kerne experimentell sehr gut bekannt und für den Grundzustand von einfacher, kugelsymmetrischer Form.

Es liegt daher nahe, für die schwereren Kerne die Summation über sämtliche Einteilchenmatrixelemente zu vermeiden und die gesuchten Kernmatrixelemente der Ladungsmonopolmomente direkt aus den gemessenen Ladungsdichten zu bestimmen.

Aus (IV.3) folgt sofort

$$\langle 0 || \hat{M}_0 || 0 \rangle = \frac{1}{4\pi} F_{(k)}(q) \quad (V.28)$$

mit dem Kernformfaktor

$$F_{(k)}(q) \equiv \int d^3x_1 \dots d^3x_A j_0(qx_i) \rho(\vec{x}_i) \quad (V.29)$$

der im elektromagnetischen Fall mit dem üblichen Ladungsformfaktor übereinstimmt (s. z.B. Ref. (42)). Für eine kugelsymmetrische Verteilung kann das Integral reduziert werden⁽⁶⁴⁾ :

$$F_{(k)}(q) = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty dx \cdot x \cdot \sin qx \quad (V.30)$$

Durch Einsetzen der Fermiverteilung (V.2) erhält man⁽⁶⁰⁾

$$F_{(k)}(q) = \frac{4\pi^2 g_A \tau_1 c}{q} \left[\frac{\pi \tau_1}{c} \sin(qc) (\cosh(\pi \tau_1 q) \operatorname{csch}^2(\pi \tau_1 q) - \cos(qc) \operatorname{csch}(\pi \tau_1 q)) \right] \quad (V.31)$$

Damit ist nach (V.28) das elektromagnetische Matrixelement

$\langle 0 || \hat{M}_0 || 0 \rangle$ für die Fermiverteilung (V.2) bestimmt. Zur

Berechnung des schwachen neutralen Matrixelementes $\langle 0 || \hat{M}_0^2 || 0 \rangle$ wird die Beziehung (V.18) verwendet.

V.4 Einteilchenmatrixelemente

Die in (V.10) definierten Matrixelemente der Multipoloperatoren zwischen gebundenen Nukleonzuständen, die nach (V.8) zur Bestimmung der gesuchten Kernstrommatrixelemente benötigt werden, sollen nun berechnet werden. Dazu wird, wie in Abschnitt V.1 erklärt, von den freien Einteilchenmatrixelementen (II.5) bzw. (II.19) ausgegangen. Auf Grund von Voraussetzung 1 aus Abschnitt V.1 wird zunächst in Abschnitt V.4.1.1 eine nicht-relativistische Näherung für die Matrixelemente eingeführt. In Abschnitt V.4.1.2 wird ihre Ortsdarstellung angegeben, aus der in Abschnitt V.4.2 die gesuchten Einteilchenmatrixelemente (V.10) berechnet werden.

V.4.1 Freie Nukleonmatrixelemente

V.4.1.1 Nichtrelativistische Näherung

Im Rahmen einer nichtrelativistischen Beschreibung des Kerns können die Nukleonzustände durch die freien Spinoren⁽³⁵⁾

$$u(\vec{k}_i, \vec{\sigma}_i) = \sqrt{\frac{k_{oi} + m_N}{2k_{oi}}} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma}_i \cdot \vec{k}_i}{k_{oi} + m_N} \chi \end{pmatrix} \quad (\text{V.32})$$

dargestellt werden (Normierung s. (A.9)). Durch Einsetzen von (V.32) in (II.5) bzw. (II.19) erhält man für den Vektoranteil der schwachen Ladungsdichte⁺)

+) Aus technischen Gründen werden hier die Sachsformfaktoren $\begin{Bmatrix} G_V^2 \\ G_H^2 \end{Bmatrix} \equiv T_1^{\{\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\}} + 2m_N T_2^{\{\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\}}$ in Verbindung mit den $T_2^{\{\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\}}$ verwendet.

$$g_V^{2^0} \equiv \langle \vec{k}_i' \vec{b}_i' g_i | \hat{J}_{V(i)}^{2^0} | \vec{k}_i \vec{b}_i g_i \rangle = \chi^\dagger(\vec{b}_i') \eta^\dagger(g_i) [G_V^{2^0} - 2m_N F_2^{2^0}] \eta(g_i) \chi(\vec{b}_i) \quad (V.33)$$

Der axiale Anteil $g_A^{2^0}$ wird aus Paritätsgründen zur Berechnung der Übergangsraten nicht benötigt (s. Abschnitt IV.3.2). Für die Matrixelemente von $\hat{J}_V^{2^0}$ und $\hat{J}_A^{2^0}$ ergibt

$$\begin{aligned} \hat{J}_V^{2^0} &\equiv \langle \vec{k}_i' \vec{b}_i' g_i | \hat{J}_{V(i)}^{2^0} | \vec{k}_i \vec{b}_i g_i \rangle = \chi^\dagger(\vec{b}_i') \eta^\dagger(g_i) [(G_V^{2^0} - 2m_N F_2^{2^0}) \frac{\vec{k}_i' + \vec{k}_i}{2m_N} - G_V^{2^0} \frac{i(\vec{b}_i \times \vec{q})}{2m_N}] \eta(g_i) \chi(\vec{b}_i) \\ &\quad (V.34) \end{aligned}$$

$$\hat{J}_A^{2^0} \equiv \langle \vec{k}_i' \vec{b}_i' g_i | \hat{J}_{A(i)}^{2^0} | \vec{k}_i \vec{b}_i g_i \rangle = \chi^\dagger(\vec{b}_i') \eta^\dagger(g_i) [-G_A \vec{b}_i] \eta(g_i) \chi(\vec{b}_i) \quad (V.35)$$

und für die elektromagnetischen Matrixelemente

$$g^{\gamma} \equiv \langle \vec{k}_i' \vec{b}_i' g_i | \hat{J}_{0(i)}^{\gamma} | \vec{k}_i \vec{b}_i g_i \rangle = \chi^\dagger(\vec{b}_i') \eta^\dagger(g_i) [G_H^{\gamma} - 2m_N F_2^{\gamma}] \eta(g_i) \chi(\vec{b}_i) \quad (V.36)$$

$$\begin{aligned} \vec{g}^{\gamma} &\equiv \langle \vec{k}_i' \vec{b}_i' g_i | \hat{J}_{(i)}^{\gamma} | \vec{k}_i \vec{b}_i g_i \rangle = \chi^\dagger(\vec{b}_i') \eta^\dagger(g_i) [(G_H^{\gamma} - 2m_N F_2^{\gamma}) \frac{\vec{k}_i' + \vec{k}_i}{2m_N} - G_H^{\gamma} \frac{i(\vec{b}_i \times \vec{q})}{2m_N}] \eta(g_i) \chi(\vec{b}_i) \\ &\quad (V.37) \end{aligned}$$

Bei der Berechnung von (V.33) bis (V.37) wurden lediglich Terme bis zur Ordnung $\frac{k'}{m_N}$ bzw. $\frac{k}{m_N}$ berücksichtigt, Terme der Ordnung $(\frac{k'}{m_N})^2, (\frac{k}{m_N})^2$ wurden vernachlässigt. Bei der nichtrelativistischen Beschreibung des Kerns werden ohnehin in $\frac{k}{m_N}$ quadratische Terme unberücksichtigt gelassen (wie z.B. bei der Verwendung der freien Spinoren (V.32)); daher ist diese Vernachlässigung sinnvoll.

In dieser Näherung enthalten die Ladungsdichten $\rho^{\gamma/2^0}$ und die axiale Stromdichte $\vec{J}_A^{2^0}$ nur Terme der 0. Ordnung, die vektoriellen Stromdichten $\vec{J}_V^{\gamma/2^0}$ nur solche der 1. Ordnung in $\frac{k}{m_N}$.

Die Abschätzung des dabei verursachten Fehlers soll kurz skizziert werden:

In den exakten Ausdrücken für die Einteilchenmatrixelemente treten in $\mathcal{S}_V^{r/2}$ zusätzlich Terme proportional zu $\left(\frac{k'}{m_N}\right)^2$ bzw. $\left(\frac{k}{m_N}\right)^2$ auf. Höhere Ordnungen kommen nicht vor. Ein typischer Term ist $G_N^r \frac{q^2}{8m_N^2}$ in $\mathcal{S}^r$, dessen Vernachlässigung relativ zu $G_N^r - 2m_N \bar{F}_2^r$ in (V.36) für die Protonenladungsdichte $\mathcal{S}_{(p)}^r$ einen Fehler von

$$\tilde{F} \equiv \frac{G_N^r}{8m_N^2 / (G_N^r - 2m_N \bar{F}_2^r)} = \frac{1 + \mu_{ip}}{8} \frac{q^2}{m_N^2} = 0,39 \frac{q^2}{\text{GeV}^2} \quad (\text{V.38})$$

verursacht, d.h. für die hier betrachteten Impulsüberträge

$$\tilde{F} \leq \tilde{F}_{\text{max}} = 14\% \quad (\text{V.39})$$

$\tilde{F}_{\text{max}}$ gibt den im Matrixelement (V.36) verursachten Fehler für die Elektronenenergie $E = 300 \text{ MeV}$ und den Streuwinkel $\theta = \pi$ an. Da es sich um Matrixelemente der Ladungsdichte handelt, wird dieser Fehler bei der Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit noch durch den kinematischen Faktor unterdrückt, der für die Ladungsstreuung mit $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ abfällt (s. Gl.(IV.21)). Der maximale Fehler in der Übergangswahrscheinlichkeit tritt daher beim Streuwinkel $\theta = \frac{\pi}{2}$ auf und beträgt nur 7 %.

V.4.1.2 Ortsdarstellung

Die Ortsdarstellung für die Terme 0. und 1. Ordnung der Matrixelemente (V.33) bis (V.37) läßt sich auf einfache Weise berechnen.

Es ist

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}_i' \vec{b}_i' g_i | \hat{Y}_\mu(\vec{x}) | \vec{x}_i \vec{b}_i g_i \rangle &= \int d^3 k_i' d^3 k_i \langle \vec{x}_i | \vec{k}_i' \rangle \cdot \\ &\cdot \langle \vec{k}_i' \vec{b}_i' g_i | \hat{Y}_\mu(\vec{x}) | \vec{k}_i \vec{b}_i g_i \rangle \langle \vec{k}_i | \vec{x}_i \rangle \end{aligned} \quad (V.40)$$

Unter Verwendung der Translationsinvarianz⁽³⁷⁾

$$\hat{Y}_\mu(\vec{x}) = e^{-i \vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{Y}_\mu(0) e^{i \vec{p} \cdot \vec{x}} \quad (V.41)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}_i' \vec{b}_i' g_i | \hat{Y}_{\mu(i)}(\vec{x}) | \vec{x}_i \vec{b}_i g_i \rangle &= O_{\mu(i)}(\vec{b}_i' \vec{b}_i g_i; \vec{x}_i' | \vec{x}_i) \cdot \\ &\cdot \delta(\vec{x}_i' - \vec{x}) \delta(\vec{x}_i - \vec{x}) \end{aligned} \quad (V.42)$$

Dabei sind die Einteilchenoperatoren $O_{\mu(i)}$ für die von den Impulsen unabhängigen Terme (V.33), (V.35), (V.36) gegeben durch

$$O_{0(i)}^{\{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\}}(\vec{b}_i' \vec{b}_i g_i) \equiv F_{1(i)}^{\{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\}} \delta_{\vec{b}_i' \vec{b}_i} F(q^2) \quad (V.43)$$

$$O_{A(i)}^{\frac{1}{2}0}(\vec{b}_i' \vec{b}_i g_i) \equiv -\mu_{A(i)}^{\frac{1}{2}0} \chi^\dagger(\vec{b}_i') \vec{b}_i, \chi(\vec{b}_i) F(q^2), \quad (V.44)$$

wobei $F_{1(i)}^{\{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\}}$ die in (II.21) bzw. (II.10) definierte schwache neutrale bzw. elektromagnetische "Ladung" des i-ten Nukleons ist und $\mu_{A(i)}^{\frac{1}{2}0}$ das in (II.23) definierte schwache neutrale axiale "magnetische Moment".

Mit Hilfe partieller Integration von (V.40) erhält man für die in $\frac{k_i'}{m_N}$ bzw. $\frac{k_i}{m_N}$ linearen Terme in Ortsdarstellung Gradienten, die auf die Ortskoordinaten $\vec{x}_1'$ bzw. $\vec{x}_1$ der Nukleonwellenfunktionen wirken; es ist

$$\begin{aligned} O_{V(i)}^{\{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\}}(\vec{b}_i' \vec{b}_i g_i; \vec{x}_i' | \vec{x}_i) &\equiv \frac{F(q^2)}{2m_N} \left\{ F_{1(i)}^{\{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\}} \delta_{\vec{b}_i' \vec{b}_i} (\vec{\nabla}_{\vec{x}_i'} - \vec{\nabla}_{\vec{x}_i}) - \right. \\ &\left. - [\mu_{V(i)}^{\{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\}} \chi^\dagger(\vec{b}_i') \vec{b}_i, \chi(\vec{b}_i) \times (\vec{\nabla}_{\vec{x}_i'} + \vec{\nabla}_{\vec{x}_i})] \right\} \end{aligned} \quad (V.45)$$

$\mu_V^{\{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\}}$ sind dabei die in (II.22) bzw. (II.11) definierten

vektoriellen magnetischen Momente.

Wie die Impulsdarstellungen (II.5) bzw. (II.19) gehen natürlich auch die Ortsdarstellungen (V.43) - (V.45) der elektromagnetischen und schwachen vektoriellen Matrixelemente durch Ersetzen der elektromagnetischen Formfaktoren G_H^r und F_2^r durch die schwachen neutralen Formfaktoren $G_V^{2^0}$ und $F_2^{2^0}$ auseinander hervor.

V.4.2 Multipolmatrixelemente zwischen gebundenen Nukleon- zuständen

Durch Einsetzen der durch die Gleichungen (V.42) bis (V.45) gegebenen Ortsdarstellungen der freien Einteilchenmatrixelemente in die Gleichungen für die Multipolmomente (IV.3), (IV.6) und (IV.7) erhält man die Ortsdarstellungen der freien Multipolmatrixelemente. Mit Hilfe von (V.10) ergeben sich daraus die gesuchten reduzierten Matrixelemente der Multipoloperatoren zwischen gebundenen Nukleonzuständen. Diese sind für den elektromagnetischen Fall in Ref. (50) angegeben. Für die hier benötigten Kombinationen der Drehimpulsquantenzahlen l, j sind sie gemeinsam mit den Vektoranteilen der schwachen Multipolmatrixelemente, die man durch Vertauschen der elektromagnetischen mit den schwachen neutralen Vektorformfaktoren erhält, in Anhang B aufgeführt. Von den Axialanteilen der schwachen neutralen Multipolmatrixelementen werden zur Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit nur die Einteilchenmatrixelemente der $\hat{T}_{1A}^{2^0}$ benötigt (s. Abschnitt IV.3.2). Diese werden im folgenden berechnet:

Nach (IV.6) gilt

$$\begin{aligned} \langle N_{i0} | \hat{T}_{3HA}^{20} | N_{i0} \rangle &= \frac{1}{q} \int d^3x d^3x_i' d^3x_i \sum_{\vec{b}_i', \vec{b}_i} \langle N_{i0} | \vec{x}_i' | \vec{b}_i' \rangle \cdot \\ &\cdot \langle \vec{x}_i' | \vec{b}_i' | g_i | [\vec{\nabla}_x \times (j_y(qx) Y_{yy-1}^H(\varphi_x, \vartheta_x))] \cdot \hat{T}_{3A}^{20}(\vec{x}) | x_i \vec{b}_i | g_i \rangle \langle \vec{x}_i | \vec{b}_i | N_{i0} \rangle \end{aligned} \quad (V.46)$$

Nach Einsetzen der durch die Gleichungen (V.42) und (V.44) gegebenen Ortsdarstellung von $\hat{T}_A^{20}$ kann die Integration über $\vec{x}_1'$ und $\vec{x}_1$ ausgeführt werden. Mit Hilfe der Beziehung⁽⁵²⁾

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (j_y(qx) Y_{yy-1}^H(\varphi_x, \vartheta_x)) &= iq \left\{ -\sqrt{\frac{y}{2y+1}} j_{y+1}(qx) Y_{yy+1}^H + \right. \\ &\left. + \sqrt{\frac{y+1}{2y+1}} j_{y-1}(qx) Y_{yy-1}^H \right\} \end{aligned} \quad (V.47)$$

folgt aus (V.46) für das reduzierte Matrixelement

$$\begin{aligned} \langle (n(l\frac{1}{2})j)_{i0} | \hat{T}_{3A}^{20} | (n(l\frac{1}{2})j)_{i0} \rangle &= i \mu_{A(i0)} \cdot \langle (n(l\frac{1}{2})j)_{i0} | (-\sqrt{\frac{y}{2y+1}} \cdot \\ &\cdot j_{y+1} Y_{yy+1} + \sqrt{\frac{y+1}{2y+1}} j_{y-1} Y_{yy-1}) \cdot \vec{b}_{i0} | (n(l\frac{1}{2})j)_{i0} \rangle \end{aligned} \quad (V.48)$$

Das Matrixelement auf der rechten Seite von (V.48) ist in Anhang B angegeben (Gleichungen (B.5) und (B.6)).

Mit den Gleichungen (V.48) und (B.1) bis (B.7) sind die reduzierten Einteilchenmatrixelemente der Multipoloperatoren bestimmt und können zur Berechnung der Kernmultipolmomente in Abschnitt V.2 verwendet werden.

VI. ERGEBNISSE

In Abschnitt VI.1 wird die Asymmetrie für die hier untersuchten Kerne in Form von geschlossenen analytischen Ausdrücken angegeben. Abschnitt VI.2 enthält die Diskussion der analytischen und numerischen Resultate: Anhand der in Abschnitt VI.1 zusammengestellten Formeln wird in Abschnitt VI.2.1 die Abhängigkeit der Ergebnisse für die Asymmetrie vom verwendeten Kernmodell untersucht. In Abschnitt VI.2.2 werden die Ergebnisse unter dem Gesichtspunkt der Möglichkeiten zur Untersuchung der schwachen neutralen Strom-Stromkopplung zwischen Elektronen und Nukleonen diskutiert: Abschnitt VI.2.2.1 untersucht die Größenordnung (VI.2.2.1.1) und Meßbarkeit (Abschnitt VI.2.2.1.2) der numerischen Resultate, die schon für den bloßen Existenznachweis dieser Kopplung relevant sind. Abschnitt VI.2.2.2 zeigt die Möglichkeiten zur Bestimmung ihrer Struktur auf, dazu wird er noch einmal aufgegliedert: Abschnitt VI.2.2.2.1 gibt anhand der Formeln aus Abschnitt VI.1 die bestimmbaren Kombinationen der schwachen Parameter an, und zwar jeweils in Form des Parametersatzes (II.26b). Abschnitt VI.2.2.2.2 behandelt die Möglichkeiten zum Test verschiedener Eichmodelle.

VI.1 Explizite Ausdrücke für die Asymmetrie

Die Formeln für die Asymmetrie werden in Tabellenform dargestellt. Tabelle VI enthält für jeden der untersuchten Kerne die Gesamtasymmetrie $\tilde{A}(\theta)$ sowie die in (IV.44)

und (IV.45) definierten einzelnen Beiträge $\tilde{A}^{\pi(0)}, \tilde{A}^{\tau(0)}$ und die Asymmetrie in Rückwärtsstreuung $\tilde{A}^{\pi}(\pi) = \tilde{A}^{\tau}(\pi)$. Für die Kerne ${}^3\text{H}$ und ${}^3\text{He}$ ist in den mit a) bezeichneten Zeilen jeweils der nach (IV.41) und (IV.43) unter Verwendung der Auswahlregeln aus Tabelle IIIa berechnete Ausdruck, der für alle Kerne gleichen Spins gilt, angegeben und in den Zeilen b) derjenige der sich durch Einsetzen der speziellen Multipolmomente aus Kapitel V (Gleichungen (V.20) bis (V.23)) ergibt.

Für die Kerne ${}^{41}\text{Ca}$ und ${}^{209}\text{Bi}$ sind die Formeln aufgeführt, die man unter Verwendung der Separation des Kernzustandes in den Anteilen der unteren, zu Spin 0 gekoppelten Schalen und denjenigen des Valenznukleons nach (V.26) und (V.27) erhält. Dabei wurden die folgenden Bezeichnungen gewählt:

$$U^{\pi 2^0} \equiv (2I+1) \langle 0 \| \sum_{i=1}^{A-1} \hat{H}_{0i}^{\pi} \| 0 \rangle \langle 0 \| \sum_{i=1}^{A-1} \hat{H}_{0i}^{\tau 2^0} \| 0 \rangle^{\pi} \quad (\text{VI.1})$$

$$U^{\pi \tau} \equiv (2I+1) |\langle 0 \| \sum_{i=1}^{A-1} \hat{H}_{0i}^{\pi} \| 0 \rangle|^2 \quad (\text{VI.2})$$

$$V^{\pi 2^0} \equiv \sum_j \langle n(\ell \frac{1}{2}) I \parallel \hat{H}_{j(\lambda)}^{\pi} \parallel n(\ell \frac{1}{2}) I \rangle \cdot \langle n(\ell \frac{1}{2}) I \parallel \hat{H}_{j\nu(\lambda)}^{\tau 2^0} \parallel n(\ell \frac{1}{2}) I \rangle^{\pi} \quad (\text{VI.3})$$

$$V^{\pi \tau} \equiv \sum_j |\langle n(\ell \frac{1}{2}) I \parallel \hat{H}_{j(\lambda)}^{\pi} \parallel n(\ell \frac{1}{2}) I \rangle|^2 \quad (\text{VI.4})$$

$$T_V^{\pi 2^0} \equiv \sum_j \langle n(\ell \frac{1}{2}) I \parallel \hat{T}_j^{\text{mag} \pi} \parallel n(\ell \frac{1}{2}) I \rangle \cdot \langle n(\ell \frac{1}{2}) I \parallel \hat{T}_{j\nu}^{\text{mag} \tau 2^0} \parallel n(\ell \frac{1}{2}) I \rangle^{\pi} \quad (\text{VI.5})$$

$$T_V^{\pi \tau} \equiv \sum_j |\langle n(\ell \frac{1}{2}) I \parallel \hat{T}_j^{\text{mag} \pi} \parallel n(\ell \frac{1}{2}) I \rangle|^2 \quad (\text{VI.6})$$

$$T_A^{\pi 2^0} \equiv \sum_j \langle n(\ell \frac{1}{2}) I \parallel \hat{T}_j^{\text{mag} \pi} \parallel n(\ell \frac{1}{2}) I \rangle \cdot \langle n(\ell \frac{1}{2}) I \parallel \hat{T}_{j\lambda}^{\tau 2^0} \parallel n(\ell \frac{1}{2}) I \rangle^{\pi} \quad (\text{VI.7})$$

Dann gilt nach (V.18)

$$\frac{U^{r2^0}}{U^{rr}} = F \quad (\text{VI.8})$$

$$\frac{V^{r2^0}}{V^{rr}} = \frac{F_1^{2^0}(A)}{F_1^r(A)} \quad (\text{VI.9})$$

(F ist der in (V.16) definierte Quotient aus schwachen und elektromagnetischen Nukleonformfaktoren)

und durch Einsetzen von (V.26) und (V.27) in die Gleichungen für die Asymmetrie (IV.43) bis (IV.46) ergeben sich die in Tabelle VI aufgeführten Ausdrücke.

Für die Kerne mit Spin 0 existiert nur das Ladungsmonopolmoment. Die Asymmetrie erhält man in diesem Fall durch Einsetzen der Beziehung (V.18) in die Gleichung (IV.44). Das Ergebnis, das von Feinberg für Kerne mit Isospin 0 abgeleitet wurde⁽²⁹⁾, wird auf diese Weise reproduziert.

Der in allen Gleichungen aus Tabelle VI auftretende Faktor $c(\theta)$ ergibt sich aus dem Verhältnis der Kopplungskonstanten $G/\sqrt{2}$ und $e^2/4\pi\alpha$ und aus dem Photonpropagator $\frac{1}{q^2}$, der im Zähler linear, im Nenner jedoch quadratisch auftritt

(s. Abschnitt III.2); er ist definiert durch

$$c(\theta) \equiv \frac{\sqrt{2} G \epsilon^2}{\alpha \cdot \pi} s/4^2 \frac{\theta}{2} \quad (\text{VI.10})$$

f^c sind die in Abschnitt III.3 berechneten Distorsions-Korrekturterme.

Tab. VI : Formeln für die Asymmetrie

Isotop	Asymmetrie
${}^3\text{H},$ ${}^3\text{He}$	$\left\{ \begin{aligned} \tilde{A}(\theta) &= c(\theta) \cdot \frac{c_{AE} \left\{ \left\langle \frac{1}{2} \ \hat{\Pi}_{0V}^{\gamma}\ \frac{1}{2} \right\rangle \left\langle \frac{1}{2} \ \hat{\Pi}_{0V}^{20}\ \frac{1}{2} \right\rangle \cos \frac{\theta}{2} + \left\langle \frac{1}{2} \ \hat{\Pi}_{1V}^{\gamma}\ \frac{1}{2} \right\rangle \left\langle \frac{1}{2} \ \hat{\Pi}_{1V}^{20}\ \frac{1}{2} \right\rangle \right\} \frac{1}{2} (1 + \sin \frac{2\theta}{2}) + c_{VE} \left\langle \frac{1}{2} \ \hat{\Pi}_{1V}^{\gamma}\ \frac{1}{2} \right\rangle \left\langle \frac{1}{2} \ \hat{\Pi}_{1V}^{20}\ \frac{1}{2} \right\rangle \sin \frac{\theta}{2} \right. \\ &\quad \left. \left\langle \frac{1}{2} \ \hat{\Pi}_{0V}^{\gamma}\ \frac{1}{2} \right\rangle \left\langle \frac{1}{2} \ \hat{\Pi}_{0V}^{20}\ \frac{1}{2} \right\rangle \cos^2 \frac{\theta}{2} + \left\langle \frac{1}{2} \ \hat{\Pi}_{1V}^{\gamma}\ \frac{1}{2} \right\rangle \left\langle \frac{1}{2} \ \hat{\Pi}_{1V}^{20}\ \frac{1}{2} \right\rangle \cos \frac{\theta}{2} \right\} \quad \text{(VI.11)} \\ \tilde{A}^M(\theta) &= c(\theta) \cdot c_{AE} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2} \ \hat{\Pi}_{1V}^{\gamma}\ \frac{1}{2} \right\}^2 (1 + \sin \frac{2\theta}{2})}{1 + \frac{1}{2} \ \hat{\Pi}_{0V}^{\gamma}\ \frac{1}{2} \right\}^2 (1 + \sin \frac{2\theta}{2})} \quad \text{(VI.12)} \\ \tilde{A}^T(\theta) &= c(\theta) \cdot \frac{c_{AE} \left\langle \frac{1}{2} \ \hat{\Pi}_{1V}^{\gamma}\ \frac{1}{2} \right\rangle \left\langle \frac{1}{2} \ \hat{\Pi}_{1V}^{20}\ \frac{1}{2} \right\rangle \frac{1}{2} (1 + \sin \frac{2\theta}{2}) - c_{VE} \left\langle \frac{1}{2} \ \hat{\Pi}_{1V}^{\gamma}\ \frac{1}{2} \right\rangle \left\langle \frac{1}{2} \ \hat{\Pi}_{1V}^{20}\ \frac{1}{2} \right\rangle \sin \frac{\theta}{2} \right. \\ &\quad \left. \left\langle \frac{1}{2} \ \hat{\Pi}_{0V}^{\gamma}\ \frac{1}{2} \right\rangle \left\langle \frac{1}{2} \ \hat{\Pi}_{0V}^{20}\ \frac{1}{2} \right\rangle \cos^2 \frac{\theta}{2} + \left\langle \frac{1}{2} \ \hat{\Pi}_{1V}^{\gamma}\ \frac{1}{2} \right\rangle \left\langle \frac{1}{2} \ \hat{\Pi}_{1V}^{20}\ \frac{1}{2} \right\rangle \cos \frac{\theta}{2} \right\} \quad \text{(VI.13)} \end{aligned} \right.$
	$\left\{ \begin{aligned} \tilde{A}(\theta) &= c(\theta) \cdot \frac{c_{AE} \left\{ \left\langle \frac{3}{2} \ \hat{\Pi}_{1V}^{\gamma}\ \frac{1}{2} \right\rangle \cos^2 \frac{\theta}{2} + \mu_{VC(A)}^{\gamma} \mu_{V(A)}^{20} \frac{q^2}{4 \mu_{NV}^2} \cdot \frac{1}{2} (1 + \sin \frac{2\theta}{2}) \right\} + c_{VE} \mu_{VC(A)}^{\gamma} \mu_{V(A)}^{20} \frac{q}{2 \mu_{NV}} \sin \frac{\theta}{2} \right. \\ &\quad \left. \frac{q^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + \mu_{VC(A)}^{\gamma} \mu_{V(A)}^{20} \frac{q}{2 \mu_{NV}} \right\}^2 (1 + \sin \frac{2\theta}{2})}{4 q^2} \quad \text{(VI.14)} \end{aligned} \right.$
	$\left\{ \begin{aligned} \tilde{A}^M(\theta) &= c(\theta) c_{AE} \cdot \frac{4 q^2 + \left(\frac{\mu_{VC(A)}^{\gamma} q}{\mu_{NV}} \right)^2 \cdot \frac{(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2})}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}}{4 q^2 + \left(\frac{\mu_{VC(A)}^{\gamma} q}{\mu_{NV}} \right)^2 \cdot \frac{(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2})}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}} \quad \text{(VI.15)} \\ \tilde{A}^T(\theta) &= c(\theta) \cdot \frac{c_{AE} \mu_{VC(A)}^{\gamma} \frac{1}{2} (1 + \sin \frac{2\theta}{2}) - c_{VE} \mu_{VC(A)}^{\gamma} \frac{2 \mu_{NV} \sin \frac{\theta}{2}}{q} \cdot \left(\frac{\mu_{V(A)}^{\gamma} q}{\mu_{NV}} \right)^2 (1 + \sin \frac{2\theta}{2})}{\mu_{VC(A)}^{\gamma} \frac{1}{2} (1 + \sin \frac{2\theta}{2})} \quad \text{(VI.16)} \end{aligned} \right.$
	$\tilde{A}(\pi) = c(\pi) \left\{ c_{AE} \frac{\mu_{VC(A)}^{20}}{\mu_{V(A)}} - c_{VE} \frac{\mu_{VC(A)}^{20}}{\mu_{V(A)}} \frac{\mu_{NV}}{E} \right\} \quad \text{(VI.16a)}$

Tab. VI (Fortsetzung): Formeln für die Asymmetrie

Isotop	Asymmetrie
^{41}Ca , ^{209}Bi	$\tilde{A}(\theta) = c(\theta) \cdot \frac{c_{Ae} \left\{ (u^{r20} + v^{r20}) \cos^2 \frac{\theta}{2} + T_v^{r20} \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}) \right\} - c_{ve} T_A^{r20} \sin \frac{\theta}{2}}{(u^{r20} + v^{r20}) \cos^2 \frac{\theta}{2} + T_v^{r20} \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \frac{\theta}{2})} \cdot f^c \quad (\text{VI.17})$ $\tilde{A}^{\pi}(\theta) = c(\theta) \cdot c_{Ae} \cdot \frac{(u^{r20} + v^{r20}) \cos^2 \frac{\theta}{2}}{(u^{r20} + v^{r20}) \cos^2 \frac{\theta}{2} + T_v^{r20} \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \frac{\theta}{2})} \quad f^c = c(\theta) c_{Ae} \frac{T + \frac{T_{r20}}{u^{r20}} + \frac{T_{r20}}{u^{r20}} \frac{v^{r20}}{u^{r20}}}{1 + \frac{v^{r20}}{u^{r20}} + \frac{T_{r20}}{u^{r20}} \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}) - c_{ve} \frac{T_{r20}}{u^{r20}} \sin \frac{\theta}{2}} \quad f^c$ $\tilde{A}^{\tau}(\theta) = c(\theta) \cdot \frac{c_{Ae} T_v^{r20} \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}) - c_{ve} T_A^{r20} \sin \frac{\theta}{2}}{(u^{r20} + v^{r20}) \cos^2 \frac{\theta}{2} + T_v^{r20} \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \frac{\theta}{2})} \quad f^c = c(\theta) \frac{c_{Ae} \frac{T_{r20}}{u^{r20}} \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}) - c_{ve} \frac{T_{r20}}{u^{r20}} \sin \frac{\theta}{2}}{(1 + \frac{v^{r20}}{u^{r20}}) \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{T_{r20}}{u^{r20}} \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \frac{\theta}{2})} \quad f^c \quad (\text{VI.19})$
^{12}C , ^{40}Ca , ^{208}Pb	$\tilde{A}(\theta) = \tilde{A}^{\pi}(\theta) = c(\theta) c_{Ae} \frac{c_{011} \hat{\pi}_{00}^{r20} < 0 > c_{011} \hat{\pi}_{01}^{r20} < 0 >}{ c_{011} \hat{\pi}_{00}^{r20} < 0 > ^2} \quad f^c = c(\theta) c_{Ae} T f^c \quad (\text{VI.20})$ $\tilde{A}^{\tau}(\theta) = \sigma \quad (\text{VI.21})$

VI.2 Diskussion der analytischen und numerischen Resultate

VI.2.1 Abhängigkeit vom Kernmodell

In die Formeln für die Asymmetrie aus Tabelle VI geht die Kernstruktur über die Kern-Multipolmomente ein, die Ausdrücke sind i.a. abhängig vom gewählten Kernmodell. Da die Asymmetrie jedoch durch das Verhältnis zweier Übergangsraten gegeben ist, wird, wie in Kap. I angedeutet, die Modellabhängigkeit schwächer sein als bei den absoluten Raten. In speziellen Fällen kürzen sich die modellabhängigen Größen exakt heraus, wie z.B. bei der Asymmetrie, die bei der Streuung an Kernen mit Spin 0 auftritt. Dieser Fall wird in Ref. (29) für Kerne mit Isospin 0 behandelt und ist bereits in Abschnitt V.2.1 diskutiert.

Für die Kerne ${}^3\text{H}$ und ${}^3\text{He}$ mit Spin $1/2$ sind die Ladungsmonopolmomente ebenso wie bei den Kernen mit Spin 0 die einzigen nicht verschwindenden Coulombmomente. Daher ergibt sich für den Beitrag $\tilde{A}^n$ (VI.12) bis auf den zu dem Quotienten
$$\frac{|\langle \frac{1}{2} || \hat{T}_1^{mag} || \frac{1}{2} \rangle|^2}{|\langle \frac{1}{2} || \hat{H}_0^v || \frac{1}{2} \rangle|^2}$$
 proportionalen Term im Nenner derselbe Ausdruck wie für Kerne mit $I = 0$ (VI.20).

In erster Bornscher Näherung geht die Kernmodell-Abhängigkeit daher nur über diesen Quotienten in $\tilde{A}^n$ ein.

Der Beitrag des Valenznukleons zur Ladungstreuung an schweren Kernen kann gegenüber demjenigen der unteren Schalen vernachlässigt werden, der aus den kohärenten Beiträgen der unteren $A-1$ Nukleonen besteht. Dies wurde bereits in Abschnitt V.2.3 erläutert. Es gilt also $U^{vv} \gg V^{vv}, T^{vv}$

und die Terme $\frac{F_{1(A)}^{z^0}}{F_{1(A)}^r} \frac{V^{rr}}{U^{rr}}$ im Zähler bzw. $\frac{V^{rr}}{U^{rr}} + \frac{T^{rr}}{U^{rr}} \cdot \frac{1+\sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}$ im Nenner von (VI.18) können für nicht zu große θ gegenüber F bzw. 1 vernachlässigt werden. Die Ladungsstreuung an den Kernen ^{41}Ca und ^{209}Bi läßt sich daher im wesentlichen durch Streuung an den Kernen mit Spin 0 ^{40}Ca und ^{208}Pb beschreiben, sodaß auch in die hierbei auftretende Asymmetrie $\tilde{A}^n$ (VI.18) die Annahmen über die Kernstruktur nicht merklich eingehen.

Die Beiträge der Coulombmomente zur Asymmetrie sind also für alle betrachteten Kerne im wesentlichen unabhängig vom Kernmodell. Außerdem wurde u.a. von Friar und Negele ⁽⁶⁵⁾ und Sick ⁽⁶⁶⁾ eine Methode zur modellunabhängigen Bestimmung der elektromagnetischen Kernladungsdichten aus experimentellen Daten entwickelt. Ein Überblick über diese Methoden wird in Ref. ⁽⁶⁷⁾ gegeben. Wie in Abschnitt V.2.1 gezeigt, lassen sich die schwachen neutralen Ladungsdichten aus den elektromagnetischen Ladungsdichten berechnen, sodaß sogar eine modellunabhängige Bestimmung der absoluten Übergangsraten gegeben ist. Diese Methode zur Beschreibung semileptonischer schwacher Effekte aus entsprechenden Daten zur elektromagnetischen Wechselwirkung wurde von Donnelly und Walecka ⁽³⁰⁾ vorgeschlagen.

Anders verhält es sich mit den Transversalanteilen. Hier tragen auch die axialen schwachen neutralen Multipolmomente bei, die eine andere Struktur haben als die entsprechenden elektromagnetischen Matrixelemente und sich daher nicht so einfach aus diesen berechnen lassen wie die vektoriellen. Bis auf die auch in $\tilde{A}^n$ auftretenden Quotienten aus den

elektromagnetischen Ladungs- und Transversalmomenten geht die Kernstruktur in $\tilde{A}^T$ jedoch nur über Quotienten aus dem Axialanteil der schwachen und aus den elektromagnetischen Matrixelementen ein, so daß die Abhängigkeit vom Kernmodell nur schwach ist. Dies wird im folgenden für die Kerne ${}^3\text{H}$ und ${}^3\text{He}$ noch ausführlich erläutert:

Durch eine Analyse der Streudaten ⁽⁶⁸⁾ für die Kerne ${}^3\text{H}$ und ${}^3\text{He}$ können die magnetischen Dipolmomente bestimmt werden; von diesen unterscheiden sich die Vektoranteile der schwachen neutralen Dipolmomente nur durch die Formfaktoren des Valenznukleons (s. Gleichungen (V.24), (II.22), (II.23)). Auch der ebenso wie in $\tilde{A}^n$ auftretende Quotient
$$\frac{|\langle \frac{1}{2} \| \vec{r}_0^2 \| \frac{1}{2} \rangle|^2}{|\langle \frac{1}{2} \| \vec{r}_0^2 \| \frac{1}{2} \rangle|^2}$$
 kann aus den Streudaten bestimmt werden, sodaß der Beitrag der schwachen Wechselwirkung, der den hadronischen Vektorstrom enthält, der also proportional zu c_{Ae} ist, ebenso wie $\tilde{A}^n$ modellunabhängig bestimmt werden kann. Die Asymmetrie enthält daher die Kernstruktur wie erwartet nur durch den Quotienten aus dem axialen schwachen neutralen und dem elektromagnetischen Dipolmoment.

Auch höhere transversale Multipolmomente lassen sich durch eine einfache Skalierung an die experimentellen Daten anpassen ^{(58), (69-71)}, sodaß ähnliche Überlegungen für die bei der Streuung an den schweren Kernen ${}^{41}\text{Ca}$ und ${}^{209}\text{Bi}$ auftretende Asymmetrie gelten.

Im Rahmen der hier verwendeten Beschreibung des Kerns durch seinen Grundzustand sind für die Kerne ${}^3\text{H}$ und ${}^3\text{He}$ sowohl die einzelnen Anteile $\tilde{A}^n$ und $\tilde{A}^T$ als auch die gesamte Asymmetrie nach (VI.14) bis (VI.16) unabhängig

von den Annahmen über die Radialfunktionen; alle nicht verschwindenden Multipolmomente enthalten nach (V.20) bis (V.25) nämlich dasselbe Radialintegral, das sich daher bei der Bildung des Quotienten herauskürzt.

Da bei den Kernen mit höherem Spin ^{41}Ca und ^{209}Bi Multipolmomente zu verschiedenen Partialwellen auftreten, die verschiedene Radialintegrale enthalten, sind in diesem Fall weder die einzelnen Beiträge $\tilde{A}^H, \tilde{A}^T$ noch die Gesamtasymmetrie $\tilde{A}$ unabhängig von den Radialfunktionen und damit vom Schalenmodellparameter a_0 . Nach der oben erläuterten Methode kann jedoch durch Anpassen an die vorhandenen Daten zur elektromagnetischen Streuung ein realistisches Ergebnis für die Asymmetrie erzielt werden.

VI.2.2 Möglichkeiten zur experimentellen Untersuchung

VI.2.2.1 Nachweis der Existenz

VI.2.2.1.1 Größenordnung der Asymmetrie

Zur Abschätzung der Größenordnung wurde die bei der Streuung longitudinal polarisierter Elektronen an den Kernen mit $I \neq 0$ ^3H , ^3He , ^{41}Ca , ^{209}Bi und an den Kernen mit $I = 0$ ^{12}C , ^{40}Ca und ^{208}Pb auftretende Asymmetrie für die Elektronenenergie des Mainzer LINAC $E = 300 \text{ MeV}$ im Standardmodell mit dem Parameter $\sin^2 \theta_0 = 0,3$ berechnet. Größere Energien sind wegen des Abfalls der Formfaktoren mit q^2 ungünstig. Noch kleinere Energien sind theoretisch vorteilhafter, da die Formfaktoren dann nahe der Stelle $q^2 = 0$

und somit bekannt sind; allerdings nimmt die Asymmetrie bei festem Streuwinkel (wegen des Faktors q^2 , siehe (III.16)) mit fallender Energie ab. Aus diesen Gründen bietet sich ein mittlerer Energiewert, wie der hier betrachtete, für die Untersuchungen an.

Die Gesamtasymmetrie (durchgezogene Linie) und die Beiträge $\tilde{A}^n$ (gestrichelte Linie) und $\tilde{A}^r$ (punktierte Linie) sind in Fig. 1 bis 7 als Funktion des Streuwinkels aufgetragen⁺). Zum Vergleich ist in Fig. 8 bzw. Fig. 9 die bei der Streuung am Proton und an ${}^3\text{H}$ bzw. am Neutron und an ${}^3\text{He}$ auftretende Asymmetrie $\tilde{A}$ dargestellt (die Nukleonenasymmetrien entsprechen den punktierten Linien).

Für die Kerne ${}^{41}\text{Ca}$ und ${}^{209}\text{Bi}$ ergibt sich im Rahmen der hier verwendeten Modellannahmen eine starke Streuung der Asymmetriewerte für einige Streuwinkel. Diese Werte sind in Fig. 3 und 4 nicht eingezeichnet, da sie physikalisch irrelevant sind; sie können folgendermaßen erklärt werden: Die in (VI.17) bis (VI.19) auftretende Größe U^{rr} , die in (VI.2) definiert ist, bestimmt den elektromagnetischen Wirkungsquerschnitt und besitzt wie dieser in erster Bornscher Näherung Nullstellen. In ihrer Umgebung wird der Beitrag des Valenznukleons zu $\tilde{A}^n$, der sich nach (VI.18) durch die Terme $\frac{V^{rr}}{u^{rr}}$ und $\frac{T^{rr}}{u^{rr}}$ bemerkbar macht, groß und verändert die Werte der Asymmetrie stark. Da die Nullstellen der ersten Bornschen Näherung des elektromagnetischen Wirkungsquerschnitts physikalisch irrelevant sind, ist auch die

⁺) Die Asymmetriekurven enthalten aus den in Abschnitt III.3 erläuterten Gründen nicht den dort abgeschätzten Korrekturfaktor der Coulombdistorsion f^c .

starke Änderung der Asymmetriewerte unrealistisch; die entsprechenden Kurven werden an diesen Stellen unterbrochen.

Der Beitrag der reinen Ladungsstreuung

$$\tilde{A}^H(\theta) = c(\theta) c_{1e} \frac{\langle 0 || \hat{H}_0 || 0 \rangle \langle 0 || \hat{H}_{0v}^{20} || 0 \rangle}{|\langle 0 || \hat{H}_0 || 0 \rangle|^2} = \tilde{A}^H(I=0) \quad (\text{VI.20})$$

zur Asymmetrie wächst mit $\sin^2 \frac{\theta}{2}$. Dieses Verhalten zeigt sich an der Asymmetrie für Kerne mit Spin 0, an denen nur Ladungsstreuung stattfindet (Gleichung (VI.20) und Fig. 5 bis 7) und stimmt mit der Voraussage aus Abschnitt III.2 (Gleichung (III.16)) überein. Kerne mit Spin 0 erreichen die maximale Asymmetrie daher bei großen Streuwinkeln. Mit wachsendem θ fallen die Zählraten (IV.21a) jedoch stark ab; daher wird $\tilde{A}$ in diesem Fall nur bis zu $\theta = 170^\circ$ berechnet.

Solange die transversalen Beiträge vernachlässigt werden können, stimmt auch bei den Kernen mit $I \neq 0$ $\tilde{A}$ mit $\tilde{A}^H$ überein und wächst im wesentlichen mit $\sin^2 \frac{\theta}{2}$; $\tilde{A}^T$ ist nach Fig. 1 bis 4 nicht sichtbar von 0 zu unterscheiden. Dieser Bereich der reinen Ladungsstreuung liegt bei den leichten Kernen ^3H , ^3He und bei ^{41}Ca bei Streuwinkeln $\theta \leq 70^\circ$ und bei ^{209}Bi bei $\theta \leq 135^\circ$ (Diskussion s. unten).

Für größere θ machen sich die transversalen Beiträge bemerkbar: Die transversalen Terme im Nenner von $\tilde{A}^H$, deren Beträge für zunehmendes θ hauptsächlich mit $\frac{1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}$ wachsen (s. Gleichungen (VI.12) und (VI.18)), verringern den Beitrag $\tilde{A}^H$ und lassen ihn für $\theta \rightarrow \pi$ gegen 0 gehen; $\tilde{A}^T$ nimmt deutlich endliche Werte an.

Es ist bekannt, daß die Beiträge der Ladungsmultipolmomente in der Übergangsrate bei schweren Kernen über einen

größeren Winkelbereich dominieren als bei leichten Kernen ⁽⁴²⁾, da sämtliche Nukleonen dazu beitragen, während der Anteil der magnetischen Streuung nur von den wenigen Valenznukleonen bestimmt wird. Aus Fig. 1 bis 4 kann man nun entnehmen, daß das Gleiche für die Asymmetrie gilt. Außerdem macht sich das Valenzneutron von ⁴¹Ca bzw. ³He in der Asymmetrie stärker bemerkbar als das Valenzproton von ³H bzw. ²⁰⁹Bi. Dies zeigt sich im Bereich der Ladungsstreuung durch einen Vergleich der Kerne ²⁰⁹Bi und ²⁰⁸Pb (Fig. 4 und 7) bzw. ⁴¹Ca und ⁴⁰Ca (Fig. 3 und 6) (Auch aus den Untersuchungen der Streuung am einzelnen Nukleon geht hervor, daß die Asymmetrie für Neutronen größer als für Protonen ist ⁽³³⁾.) Aus diesen

Aus diesen Gründen stimmen $\tilde{A}^M$ und $\tilde{A}$ bei ²⁰⁹Bi über einen größeren Winkelbereich überein als bei den Kernen ³H, ³He und ⁴¹Ca (s. oben); $\tilde{A}^H$ gleicht sich dem Verlauf der Gesamtasymmetrie auch für größere Streuwinkel bei den Kernen mit Valenzproton, ³H und ²⁰⁹Bi, mehr an als bei den Kernen ³He und ⁴¹Ca, die Valenzneutronen besitzen; $\tilde{A}^T(\pi)$ ist für ³H und ²⁰⁹Bi kleiner als für ³He und ⁴¹Ca.

Nach (VI.20) hängt der Beitrag der reinen Ladungsstreuung von dem Verhältnis der Neutronenzahl zur Protonenzahl im Kern ab. Da im betrachteten Eichmodell sowohl Protonen als auch Neutronen zur schwachen Ladung beitragen, während die elektromagnetische Ladung nur durch die Protonen bestimmt ist, wächst F und damit $\tilde{A}$ im Bereich der Ladungsstreuung mit dem N/Z-Wert des Kerns (s. Gleichung (V.16)). Daher stimmt die Asymmetrie für ¹²C (Fig. 5) mit derjenigen für ⁴⁰Ca (Fig. 6) überein.

In dem betrachteten Eichmodell hat $\tilde{A}^H$ immer positives Vorzeichen, während der Beitrag der transversalen Multipolmomente negativ ist. Er erreicht sein Maximum natürlich bei

$\Theta = \pi$. An Fig. 8 und 9 sieht man, daß die bei Rückwärtsstreuung an ${}^3\text{H}$ und ${}^3\text{He}$ auftretende Asymmetrie $\tilde{A}(\pi) \equiv \tilde{A}^T(\pi)$ exakt mit derjenigen des jeweiligen Valenznukleons übereinstimmt, da die magnetischen Momente in dem hier verwendeten, einfachen Kernmodell gleich sind (s. Abschnitt V.2.2).

Die Werte von $\tilde{A}(\pi)$ sind für die untersuchten Kerne und die Nukleonen in der unten näher erläuterten Tabelle VII eingetragen. Durch einen Vergleich der Asymmetrien von ${}^{41}\text{Ca}$ und ${}^{209}\text{Bi}$ in Rückwärtsstreuung mit den entsprechenden Werten von Neutron und Proton zeigt sich, daß der Beitrag der höheren Partialwellen für die Kerne mit größeren Spins den Transversalanteil der Asymmetrie erhöht, und zwar bei ${}^{41}\text{Ca}$ um 28 % und bei ${}^{209}\text{Bi}$ um 81 % gegenüber dem entsprechenden Nukleon.

Wegen des unterschiedlichen Vorzeichens von $\tilde{A}^H$ und $\tilde{A}^T$ besitzt die Gesamtasymmetrie für die Kerne mit $I \neq 0$ $\tilde{A} = \tilde{A}^H + \tilde{A}^T$ im Bereich mittlerer bis großer Streuwinkel einen Nulldurchgang, und sie hat zwei relative Maxima jeweils in den Bereichen, in denen Ladungs- und magnetische Streuung dominieren. Diese beiden Maxima $\tilde{A}_{\max H}$ und $\tilde{A}_{\max T}$ sind für die untersuchten Kerne und zum Vergleich auch für die Nukleonen in Tabelle VII eingetragen. Der zu $\tilde{A}_{\max H}$ gehörige Streuwinkel $\Theta_{\max H}$ ist ebenfalls aufgeführt, das Maximum $\tilde{A}_{\max T}$ wird natürlich an der Stelle $\Theta = \pi$ erreicht.

Tab. VII: Maximalwerte der Asymmetrie im Standardmodell

Isotop	${}^2\text{H}$	${}^3\text{He}$	${}^{41}\text{Ca}$	${}^{209}\text{Bi}$	${}^{12}\text{C}$	${}^{40}\text{Ca}$	${}^{208}\text{Pb}$	p	n
$\tilde{A}_{\text{maxM}} (10^{-5})$	2,26	1,36	0,68	2,22	(1,82)	(1,89)	(2,77)	0,19	-
$\theta_{\text{maxM}} (\text{Grad})$	85	110	105	145	(170)	(170)	(170)	85	-
$\tilde{A}_{\text{maxT}} = \tilde{A}(\pi) (10^{-5})$	-0,21	-1,05	-1,34	-0,38	-	-	-	-0,21	-1,05

Für alle Kerne bis auf ${}^{41}\text{Ca}$ ist $\tilde{A}_{\text{maxM}}$ größer als $\tilde{A}_{\text{maxT}}$, die Kerne mit $I \neq 0$ erreichen also die größten Asymmetriewerte im Bereich mittlerer Streuwinkel, in dem die Ladungsstreuung überwiegt. Die Asymmetrie übersteigt für sämtliche Kerne die bei Nukleonstreuung maximal erreichbaren Werte; für den Kern mit dem größten N/Z-Wert ${}^3\text{H}$ ist sie am größten und beträgt 1100% (200%) der maximalen Proton-(Neutron)-Asymmetrie.

VI.2.2.1.2 Meßbarkeit der Asymmetrie

Wie bereits in Kapitel I diskutiert, wird die Meßbarkeit des Effektes nicht nur durch die Größe der Asymmetrie sondern auch durch die Häufigkeit des Übergangs bestimmt, die in diesem Fall durch den elastischen elektromagnetischen Wirkungsquerschnitt gegeben ist.

Eine genaue Betrachtung des experimentellen Signal-Rauschverhältnisses für die Asymmetrie zeigt, daß es von dem Produkt aus dem Quadrat der Asymmetrie und der Übergangsrate bestimmt wird⁽³⁴⁾. Die Größe $\tilde{A}^2 \frac{dG}{d\Omega}$ ist daher für den bei der Messung auftretenden statistischen Fehler bzw. für die bei vorgegebener Meßgenauigkeit benötigte Meßzeit ausschlaggebend. Sie wurde unter Verwendung der ersten Bornschen

Näherung des Wirkungsquerschnittes mit den gleichen Parametern, die zur Berechnung der Asymmetrie aus Fig. 1 bis 7 benutzt wurden, berechnet und ist für die verschiedenen Kerne in Fig. 10 bis 16 als Funktion von θ aufgetragen.

Die mit Pfeilen gekennzeichneten Nullstellen entsprechen den Nulldurchgängen der Asymmetrie, die übrigen Nullstellen kommen durch die unphysikalischen Minima der Bornschen Näherung zustande. Durch Kombination dieser Ergebnisse mit denjenigen für die Asymmetrie aus Abschnitt VI.2.2.1.1 ergeben sich die folgenden Schlüsse bezüglich der Meßbarkeit des Effektes:

Die größte Asymmetrie wird zwar bei großen Streuwinkeln an den Kernen mit Spin 0 erreicht, die zugehörige statistisch relevante Größe $\tilde{A}^2 \frac{d\tilde{B}}{d\Omega}$ wird jedoch für diese Streuwinkel verschwindend klein. Im Bereich kleiner Streuwinkel, in dem die schweren Kerne durch den Faktor Z^2 einen sehr günstigen Wert von $\frac{d\tilde{B}}{d\Omega}$ ergeben, ist die Asymmetrie zu klein, um einen meßbaren Effekt zu verursachen. Es ist daher am vorteilhaftesten, zum Nachweis des Effektes im Bereich mittlerer Streuwinkel zu messen.

Hier bietet die Streuung an Kernen einen weiteren Vorteil gegenüber der Streuung an einzelnen Nukleonen, denn in diesem Bereich liegt für die Kerne mit $I \neq 0$ (bis auf ^{41}Ca) das Maximum der Asymmetrie, während bei der Nukleonstreuung die maximale Asymmetrie erst in Rückwärtsrichtung erreicht wird.⁽³³⁾ Außerdem ist $\tilde{A}_{\text{max}}$ für die Nukleonen kleiner als für alle Kerne. In Tabelle VIIa sind als Beispiel für einen günstigen Meßbereich die Werte von $\tilde{A}$ und $\tilde{A}^2 \frac{d\tilde{B}}{d\Omega}^{\text{yr}}$ an der Stelle $\theta = 100^\circ$ für alle Kerne und zum Vergleich für die Nukleonen eingetragen.

Die bei der Kernstreuung erreichten Werte liegen deutlich im meßbaren Bereich. Für ${}^3\text{H}$ beträgt die Asymmetrie 1500 % (400 %) des Wertes für das Proton (Neutron). Ein entsprechender Vergleich ist für alle Kerne in der dritten Zeile der Tabelle VIIa aufgeführt.

Tab. VIIa : $\tilde{A}(100^\circ)$, $\tilde{A}^2 \frac{d\tilde{b}}{d\Omega} (100^\circ)$ im Standardmodell

Isotop	${}^3\text{H}$	${}^3\text{He}$	${}^{41}\text{Ca}$	${}^{209}\text{Bi}$	${}^{12}\text{C}$	${}^{40}\text{Ca}$	${}^{208}\text{Pb}$	p	n
$ \tilde{A}(100^\circ) (10^{-5})$	2,09	1,53	0,84	1,53	1,10	1,12	1,64	0,14	0,51
$\tilde{A}^2 \frac{d\tilde{b}}{d\Omega} (100^\circ) (10^{-17})$	10^{-17}	10^{-17}	$2 \cdot 10^{-18}$	$2 \cdot 10^{-17}$	$2 \cdot 10^{-18}$	$3 \cdot 10^{-18}$	$2 \cdot 10^{-17}$	$5 \cdot 10^{-19}$	
$ \tilde{A} / \tilde{A}_p (\%)$	1500 (400)	1000 (300)	600 (200)	1100 (300)	800 (200)	800 (200)	1200 (300)	100 (30)	400 (100)

VI.2.2.2 Analyse der Struktur

VI.2.2.2.1 Modellunabhängige Bestimmung der schwachen Parameter

In die Ausdrücke für die Asymmetrie aus Tabelle VI gehen über die Multipolmomente der schwachen neutralen Ströme und über die leptonischen Kopplungskonstanten die Parameter, die die Struktur der untersuchten Wechselwirkung bestimmen, in verschiedenen Kombinationen ein.

Wie in Kapitel II gezeigt, läßt sich die Kopplung durch die Parameter (II.26b) beschreiben, die die leptonischen Größen $C_{\nu e}, C_{\nu e}$ (def. in (II.17)) in Verbindung mit den Nukleonformfaktoren (def. in (II.19)) enthalten.

In den Anteil der Asymmetrie $\tilde{A}^H$ gehen für die schweren Kerne und die Kerne mit Spin 0 nach (VI.18) und (VI.20) die Parameter der schwachen Wechselwirkung durch

$$K^H = c_{Ae} F = c_{Ae} \left(\bar{F}_1^{\pi^0} + \frac{N}{2} \bar{F}_1^{\pi^0} \right) \quad (\text{VI.23})$$

ein ⁺). Ausgedrückt durch die Parameter (II.26b) lautet

$$K^M = \frac{1}{2} \left\{ (c_{21}^S + 2m_N c_{22}^S) \left(1 + \frac{N}{2} \right) + (c_{21}^V + 2m_N c_{22}^V) \left(1 - \frac{N}{2} \right) \right\} \quad (\text{VI.24})$$

Nach (VI.23) und (VI.24) kann bei einem elastischen Streuprozeß, bei dem Ladungsstreuung in reiner Form vorliegt, derjenige Beitrag zur paritätsverletzenden Wechselwirkung (II.24) isoliert werden, der den axialen leptonischen und den vektoriellen hadronischen Strom enthält.

In Theorien, die eine verschwindende Kopplung zwischen diesen beiden Stromanteilen vorhersagen, trägt die Ladungsstreuung daher nicht zur Asymmetrie bei. Prozesse mit reiner Ladungsstreuung sind deshalb besonders gut geeignet, eine Entscheidung zwischen solchen Theorien einerseits und Modellen, die eine nicht verschwindende Kopplung zwischen leptonischem Axial- und hadronischem Vektorstrom enthalten andererseits, zu ermöglichen.

Für Kerne mit $N=Z$, wie z.B. die hier untersuchten Kerne ^{12}C und ^{40}Ca , kann nach (VI.23) durch Messung der Asymmetrie $c_{Ae} \bar{F}_1^{\pi^0}$ allein bestimmt werden (29).

+) Für die schweren Kerne mit $I \neq 0$ enthält $\tilde{A}^H$ durch die verschiedenen Multipolmomente (und die transversalen Terme im Nenner) im Beitrag des Valenznukleons eine kompliziertere Kombination. Dieser Beitrag kann jedoch, wie in Abschnitt VI.2.2.1 diskutiert, zumindest für ^{209}Bi gegenüber dem Anteil der unteren Schalen vernachlässigt werden, sodaß durch Ladungsstreuung an ^{209}Bi auch K^H (VI.23) bestimmt wird.

Für die übrigen Kerne (mit $I=0$) ist eine getrennte Bestimmung der beiden in (VI.23) auftretenden Produkte aus den Nukleonformfaktoren und der axialen leptonischen Kopplungskonstanten im Prinzip durch Messung der Asymmetrie unter zwei verschiedenen Streuwinkeln möglich. Eine andere Möglichkeit bietet die Messung unter einem festen Streuwinkel und dafür an verschiedenen Kerntargets. Aus der Differenz der Asymmetriewerte für zwei Kerne mit verschiedenem N/Z kann $F_{A(m)}^{z^0}$ bestimmt werden. Als Funktion des Verhältnisses N/Z des jeweiligen Targets dargestellt, ergibt K^H und damit nach (VI.23) und (VI.20) auch die Asymmetrie $\tilde{A}^M$ eine Gerade $\tilde{A}^M \sim c_{Ae}(F_{A(p)}^{z^0} + \frac{N}{Z} F_{A(m)}^{z^0})$, aus deren Steigung bzw. Ordinatenabschnitt $c_{Ae} F_{A(m)}^{z^0}$ bzw. $c_{Ae} F_{A(p)}$ abgelesen werden können.

Mit Hilfe der Beziehungen (II.33) zwischen dem Parametersatz (II.26b) und den Parametern (II.32a), die bei Verwendung des Quarkmodells für die Nukleonen ebenfalls zur Beschreibung der schwachen neutralen Strom-Stromkopplung benutzt werden können (s. Kapitel II, S. 21), erhält man aus (VI.24) durch einfache Umformung

$$\begin{aligned} 2 \tilde{A}^M K^H &= 2 \left\{ c_{2u} \left(2 + \frac{N}{Z} \right) + c_{2d} \left(1 + 2 \frac{N}{Z} \right) \right\} \\ &= c_{2u} (A+2) + c_{2d} (2A-2) . \end{aligned} \quad (\text{VI.24a})$$

Dies ist die gleiche Linearkombination, die nach Tabelle I auch von den optischen Experimenten am ^{209}Bi bestimmt wurde (17)-(19). Eine Messung der bei der Ladungsstreuung auftretenden Asymmetrie kann daher auch als Test der widersprüchlichen Ergebnisse aus Tabelle I dienen.

Reine Ladungsstreuung kann nach den Überlegungen aus Abschnitt VI.2.2.1.1 außer durch Streuung an Kernen mit $I = 0$ auch

durch Streuung an schweren Kernen mit $I \neq 0$ isoliert werden. Wie dort erläutert wurde, kann für ^{209}Bi der Beitrag $\tilde{A}^T$ zur Asymmetrie bis zu Streuwinkeln $\theta \approx 135^\circ$ vernachlässigt werden. Bei diesen Streuwinkeln liegt die Asymmetrie mit $\tilde{A}(135^\circ) = 2,10 \cdot 10^{-5}$ für ^{209}Bi deutlich im meßbaren Bereich. Reine Ladungsstreuung tritt außerdem natürlich bei allen Kernen in Vorwärtsrichtung auf, hier ist aber der Wert der Asymmetrie wegen der Abhängigkeit von $\sin^2 \frac{\theta}{2}$ zu klein, um meßbar zu sein.

Die transversalen Multipolmomente hängen auch von demjenigen Beitrag der paritätsverletzenden Wechselwirkung ab, der den leptonischen Vektor- und den hadronischen Axialstrom enthält. Eine verhältnismäßig einfache Kombination der beiden Sorten von Parametern, die die Kopplung zwischen leptonischem Vektor- und hadronischem Axialstrom und zwischen leptonischem Axial- und hadronischem Vektorstrom beschreiben, kann durch Rückwärtsstreuung an Kernen mit $I \neq 0$ bestimmt werden. Hierbei müssen allerdings die durch die geringen Zählraten verursachten experimentellen Schwierigkeiten überwunden werden. Da $\tilde{A}(\pi)$ wie in Abschnitt VI.2.2.1 erklärt für die Kerne mit höheren Spins größer ist als für Kerne mit Spin $1/2$ oder Nukleonen, besteht hier eine etwas bessere Möglichkeit zur Messung der Parameter.

Für die Rückwärtsstreuung an den Kernen ^3H bzw. ^3He erhält man in der Näherung, in der die magnetischen Momente dieser Kerne mit denen der Nukleonen übereinstimmen, genau die gleiche Kombination von schwachen Parametern, die auch bei der

Streuung am einzelnen Nukleon isoliert wird. Nach (VI.16a) handelt es sich um die Kombination

$$K^T = c_{Ae} \mu_{N(A)}^{2^0} - c_{Ve} \mu_{A(A)}^{2^0} \frac{u_N}{E} \quad (VI.25)$$

Drückt man die in (II.22) und (II.23) definierten schwachen magnetischen Momente $\mu_N^{2^0}$ und $\mu_A^{2^0}$ durch die Parameter (II.26b) aus, so ergibt sich

$$K^T = \frac{1}{2} \left\{ c_{21}^S \pm c_{21}^V + (c_{11}^S \pm c_{11}^V) \frac{u_N}{E} \right\} \text{ für } \begin{matrix} {}^3\text{H} \\ {}^3\text{He} \end{matrix} \quad (VI.26)$$

Die Kombinationen (VI.24) und (VI.26) ergeben sich aus der phänomenologischen Beschreibung des pseudoskalaren Anteils der schwachen Wechselwirkung (II.26) und sind unabhängig von speziellen Eichmodellen. Durch Messung der Asymmetrie für den jeweiligen Streuprozess können diese Parameter daher auf modellunabhängige Weise bestimmt bestimmt werden. In Tabelle VIII ist noch einmal zusammengefaßt, durch welche Experimente die Linearkombinationen (VI.24) und (VI.26) bestimmt werden können und welche Werte für $\tilde{A}$ und $\tilde{A}^2 \frac{d\delta}{dQ}$ dabei im Standardmodell erwartet werden. $\tilde{A}$ und $\tilde{A}^2 \frac{d\delta}{dQ}$ wurden innerhalb des vorgeschriebenen Bereichs für solche Streuwinkel angegeben, für die die statistisch relevante Größe einen möglichst hohen Wert annimmt.

Tab. VIII: Möglichkeiten zur Bestimmung der schwachen Parameter

Vorgeschlagenes Experiment	Messbare Kombination	$\tilde{A} \quad (10^{-5})$	$\tilde{A}^2 \frac{d\delta}{dQ} \quad (10^{-17})$
Ladungsstreuung (Streuung an Kernen mit Spin 0 oder an ^{209}Bi für $\theta \leq 135^\circ$)	K^M	$A(135^\circ)_{\text{log}} = 2,10$ $A(100^\circ)_{\text{a.c.}} = 1,10$ $A(100^\circ)_{\text{v.c.a.}} = 1,12$ $A(100^\circ)_{\text{corr}} = 1,64$	$2 \cdot 10^{-16}$ $2 \cdot 10^{-18}$ $3 \cdot 10^{-18}$ $2 \cdot 10^{-17}$
Rückwärtstreuung an ${}^3\text{H}, {}^3\text{He}$	K^T	$\tilde{A}(\pi)_{\text{H}} = -0,21$ $\tilde{A}(\pi)_{\text{He}} = -1,05$	$3 \cdot 10^{-21}$ $3 \cdot 10^{-20}$

Ähnliche Überlegungen können natürlich auch für die allgemeinen Ausdrücke für die Asymmetrie aus Tabelle VI durchgeführt werden, die keine Einschränkung der Streuwinkel erfordern. Die darin enthaltenen Parameter können ebenso wie bei den oben angeführten Beispielen nach den Formeln aus Tabelle VI berechnet werden. Sie haben eine kompliziertere Struktur als (VI.24) und (VI.26); die einzelnen Parameter können an experimentelle Werte der Asymmetrie für einen größeren Winkelbereich oder für verschiedene Kerne angepaßt und auf diese Weise bestimmt werden.

VI.2.2.2.2 Test verschiedener Eichmodelle

Bei der Beschreibung der schwachen Wechselwirkung durch ein Eichmodell werden die in (II.17) und (II.31) definierten fundamentalen Kopplungskonstanten $C_{Ve}, C_{Ae}, C_{Vq}, C_{Aq}$ und damit der Parametersatz (II.32a) eindeutig festgelegt. Durch Einsetzen der aus dem jeweiligen Modell folgenden Parameter in die Asymmetrie und Vergleich mit experimentellen Ergebnissen können daher die Eichtheorien getestet werden. Diese Methode wurde in Ref. (40) zur Untersuchung der Elektron-Nukleon-Streuung benutzt. Für fünf dort verwendete $SU(2) \times U(1)$ -Modelle (3a) - (3d) wird in dieser Arbeit die Asymmetrie für die sieben oben betrachteten Kerne berechnet. Die Eichmodelle, die von 1 bis 5 numeriert sind, können in zwei Gruppen eingeteilt werden: in den Modellen 3 bis 5 (3b) - (3d) gibt es keine Kopplung an den leptonischen Axialstrom, während in den Modellen 1^(3a) und 2^(3b) keine der Kopplungsarten verschwindet. Eine genauere Beschreibung der Struktur der Theorien ist in Ref. (40) gegeben. Die zugehörigen

leptonischen und Quark-Kopplungskonstanten sind dort aufgeführt. Die hier verwendeten Parameter (II.26b) folgen über (II.33); die benötigten Nukleonformfaktoren sind als Funktion des Modellparameters $\sin^2 \theta_w$ zusammen mit den leptonischen Kopplungskonstanten für die fünf Modelle in Tabelle IX zusammengestellt.

Tab. IX : Werte der schwachen neutralen leptonischen Kopplungskonstanten und der Nukleonformfaktoren ($q^2=0$)

Modell	$c_{\nu e}$	c_{Ae}	G_V^{eS}	G_V^{eV}	F_1^{eS}	F_2^{eV}	G_A^{eS}	G_A^{eV}
1 (3a)	$-\frac{1}{2} + 2\omega$	$\frac{1}{2}$	$-2\omega G_N^{TS}$	$(1-2\omega)G_N^{TV}$	$-2\omega F_2^{TS}$	$(1-2\omega)F_2^{TV}$	0	g_{eA}
2 (3b)	"	"	$(\frac{1}{2}-2\omega)G_N^{TS}$	$(\frac{1}{2}-2\omega)G_N^{TV}$	$(\frac{1}{2}-2\omega)F_2^{TS}$	$(\frac{1}{2}-2\omega)F_2^{TV}$	$-\frac{3}{10}g_{eA}$	$\frac{3}{2}g_{eA}$
3 (3c)	$-1+2\omega$	0	"	"	"	"	"	"
4 (3d)	"	"	Wie bei Modell 1	"	Wie bei Modell 1	Wie bei Modell 1	1	"
5 (3e)	"	"	$(\frac{1}{2}-2\omega)G_N^{TS}$	$(\frac{1}{2}-2\omega)G_N^{TV}$	$(\frac{1}{2}-2\omega)F_2^{TS}$	$(\frac{1}{2}-2\omega)F_2^{TV}$	$-\frac{3}{10}g_{eA}$	$\frac{1}{2}g_{eA}$
$\omega = \sin^2 \theta_w$								

In Fig. 17 bis 23 sind für die sieben Kerne jeweils die Asymmetriewerte $\tilde{A}$ als Funktion des Streuwinkels aufgetragen, die sich aus den fünf verschiedenen Modellen mit $\sin^2 \theta_w = 0,3$ ergeben.

Da für die Modelle 3 bis 5 im Gegensatz zu 1 und 2 die Kopplungskonstante des leptonischen Axialstroms c_{Ae} verschwindet, sind nach den Überlegungen aus Abschnitt V.2.2.2.1 die Kerne mit Spin 0 am besten geeignet, diese beiden Modellgruppen zu unterscheiden; nur die Theorien 1 und 2 sagen hier eine nicht verschwindende Asymmetrie voraus (Fig.21 bis 23). Diese Asymmetrien besitzen entgegengesetztes Vorzeichen, der Betrag von $\tilde{A}$ ist in Modell 2 noch größer

als im Standardmodell 1, sodaß sich auch innerhalb der ersten Modellgruppe (Modell 1 und 2) große Differenzen ergeben. Zur experimentellen Unterscheidung zwischen den beiden Theorien 1 und 2 (und auch zwischen den beiden Modellgruppen)

bietet sich nach Fig. 17 bis 23 außer den Kernen mit Spin 0 auch ^{209}Bi (Fig. 20) an, für das der Beitrag der Transversalmomente und damit die von Modell 3 bis 5 vorhergesagte Asymmetrie relativ zu der von Modell 1 und 2 geforderten klein ist.

Um festzustellen, ob auf diese Weise eine Entscheidung zwischen den Modellen 1 und 2 möglich ist, muß noch die Aufspaltung der Asymmetrie betrachtet werden, die sich jeweils in einem Modell durch Variation von $\sin^2 \theta_w$ ergibt. Als Beispiel ist diese Aufspaltung für das Standardmodell, das bei der Streuung am Nukleon die stärksten Unterschiede zeigt, ⁽⁴⁰⁾ in Fig. 24 und 25 für die Kerne ^{209}Bi und ^{208}Pb dargestellt. Die Modellparameter $\sin^2 \theta_w = 0,25; 0,3; 0,4$, die mit vorhandenen Daten aus Neutrino-Experimenten in Einklang stehen ⁽¹¹⁾⁻⁽¹³⁾, wurden verwendet. Fig. 24 und 25 zeigen, daß sich die Aufspaltung durch die verschiedenen $\sin^2 \theta_w$ -Werte hier im Gegensatz zur Nukleonstreuung nicht mit der durch die verschiedenen Modelle verursachten überlappt, sodaß eine Unterscheidung der beiden Modelle 1 und 2 durchaus möglich ist. Für größere Streuwinkel ist die Differenz der im Standardmodell mit verschiedenen $\sin^2 \theta_w$ -Werten erhaltenen Asymmetrien trotzdem schon so beträchtlich, daß eine Bestimmung des Modellparameters innerhalb eines Modells ebenfalls im Bereich des Möglichen liegt.

Zeigt es sich, daß die Asymmetrie für Kerne mit $I = 0$ verschwindet, so können an den Kernen mit $I \neq 0$ diejenigen Modelle getestet werden, die eine Asymmetrie nur auf Grund der Kopplung zwischen leptonischem Vektor- und hadronischem Axialstrom voraussagen. Hier muß bei größeren Streuwinkeln gemessen werden, da nur die Transversalmomente zur Asymmetrie beitragen. Nach Fig. 17 bis 20 eignen sich zur Unterscheidung der Modelle 3 bis 5 vor allem ^3He und ^{41}Ca . Dies liegt daran, daß wegen des Valenzneutrons die durch die Transversalmomente verursachte Asymmetrie relativ groß ist. Die Differenzen der Asymmetriewerte für diese Modelle sind jedoch wesentlich geringer als für die Theorien 1 und 2, sodaß eine Unterscheidung hier insgesamt schwieriger ist.

Eine zweite Möglichkeit zum Test der verschiedenen Eichmodelle ergibt sich aus der in Abschnitt VI.2.2.2.1 erläuterten Methode, die Asymmetrie unter festem Streuwinkel an Targets mit verschiedenen N/Z zu bestimmen. Auf diese Weise können Modelle unterschieden werden, die eine Kopplung zwischen leptonischem Axial- und hadronischem Vektorstrom voraussagen. Bei reiner Ladungsstreuung erhält man für $\tilde{A}(\frac{N}{Z})$ eine exakte Gerade, die für jedes Eichmodell eine bestimmte Steigung und einen bestimmten Ordinatenabschnitt besitzt (s. (VI.23)). Als Beispiel sind diese Geraden für den Streuwinkel $\theta = 70^\circ$ und die Modelle 1 und 2, die einen nicht verschwindenden Wert von $\tilde{A}^h$ fordern, in Fig. 26 dargestellt. Die Asymmetrie wurde jeweils für die beiden Kerne mit Spin 0 ^{12}C und ^{208}Pb , an denen reine Ladungsstreuung stattfindet, und für ^{204}Bi , bei dem, wie in Abschnitt VI.2.2.2.1 gezeigt, der Beitrag der

magnetischen Streuung für den betrachteten Streuwinkel noch vernachlässigt werden kann, berechnet; die entsprechenden Punkte sind eingezeichnet. Auch hier zeigt sich wieder die gute Unterscheidbarkeit der beiden Modelle.

VII ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit wird die bisher noch ungeklärte Frage einer schwachen neutralen Strom-Stromkopplung zwischen Elektronen und Nukleonen untersucht. Verschiedene Möglichkeiten zum experimentellen Nachweis ihrer Existenz und zur Bestimmung ihrer Struktur werden aufgezeigt. Dazu wird die übliche V-A-Lorentzstruktur angenommen, die für die schwachen geladenen Ströme experimentell gesichert ist; bezüglich der Isospinstruktur wird die Zusammensetzung jedes der beiden Lorentzanteile der hadronischen Ströme aus einem Isoskalar und einem Iovektor zugelassen. Durch Kopplung zwischen dem leptonischen Axial- und dem hadronischen Vektorstrom oder / und zwischen dem leptonischen Vektor- und dem hadronischen Axialstrom entsteht ein pseudoskalarer Beitrag zur Wechselwirkung, der bei Interferenz mit der skalaren elektromagnetischen Wechselwirkung zu Paritätsverletzung führt.

Dieser Beitrag wird am Beispiel der elastischen Streuung longitudinal polarisierter Elektronen an verschiedenartigen Kernen untersucht. Auf Grund seines paritätsverletzenden Charakters führt er in diesem Fall zu einer Differenz zwischen den differentiellen Wirkungsquerschnitten für rechts- bzw. linkshändige Elektronen, d.h. zu einer R-L-Asymmetrie. Der pseudoskalare Anteil der Wechselwirkung wird durch Parameter beschrieben, die von speziellen Eichmodellen unabhängig sind; als Funktion dieser Parameter wird die Asymmetrie berechnet. Dazu wird zunächst nur die Paritätsreinheit der Kernzustände vorausgesetzt. Um die

Kernauswahlregeln bezüglich Drehimpuls und Parität auszunutzen, wird der schwache neutrale Kernstrom ebenso wie der elektromagnetische nach Multipolen entwickelt. Die Entwicklung des schwachen neutralen Vektorstromes ist von der gleichen Struktur wie diejenige des elektromagnetischen Stromes, die entsprechenden Multipolmomente unterscheiden sich nur durch die Nukleonformfaktoren. Die elektromagnetische und die schwache Übergangsamplitude werden in erster Bornscher Näherung als Funktion der Kernstrommatrizelemente angegeben. Daraus folgen die differentiellen Wirkungsquerschnitte und die Asymmetrie, die durch die reduzierten Kernmatrizelemente der Multipoloperatoren ausgedrückt werden.

Nun werden als Beispiele von Kernen mit verschiedener Masse, verschiedenen Spins und Isospins die Isotope ^3H , ^3He , ^{41}Ca , ^{209}Bi , ^{12}C , ^{40}Ca und ^{208}Pb betrachtet. Zur Abschätzung der Asymmetrie werden die Multipolmomente im Rahmen der Beschreibung des Kerns durch seinen Grundzustand berechnet, er wird durch eine nichtrelativistische A-Teilchenfunktion dargestellt. Der Streuprozess wird in Stoßnäherung behandelt. Auf diese Weise lassen sich die Kernmatrizelemente durch die einzelnen Nukleonmatrizelemente ausdrücken.

Für die Spin-0-Kerne wird das von Feinberg⁽²⁹⁾ für Kerne mit Spin und Isospin 0 erhaltene Ergebnis reproduziert und auf Kerne mit nicht verschwindendem Isospin ausgedehnt.

Da für die schweren Kerne ^{41}Ca und ^{209}Bi die Distorsionskorrekturen zur ersten Bornschen Näherung wichtig sind⁽⁴²⁾, werden ihre Auswirkungen auf die Asymmetrie abgeschätzt.

Die Asymmetrie wird durch einen multiplikativen Term korrigiert, der von Streuwinkel und Elektronen-Einfallsenergie abhängt

und die Asymmetrie gegenüber ihrer ersten Bornschen Näherung vergrößert.

Zusätzliche Beiträge zur Asymmetrie entstehen durch die schwachen geladenen Ströme, die in höheren Ordnungen zum Streuprozeß beitragen und durch die schwache Wechselwirkung innerhalb des Atoms. Diese sind bei der elastischen Streuung jedoch klein gegenüber den Effekten der schwachen neutralen Wechselwirkung zwischen gestreutem Elektron und Kern^{(32), (72)}.

Für die Kerne mit Spin 0 ist die Asymmetrie in erster Bornscher Näherung unabhängig vom verwendeten Kernmodell. Außerdem können die elektromagnetischen Multipolmatrixelemente durch Anpassen an vorhandene Daten bestimmt werden, sodaß die Bestimmung der elektromagnetischen Übergangsrate im wesentlichen modellunabhängig ist. Damit sind auch die Vektoranteile der schwachen neutralen Multipolmomente festgelegt, und die Kernstruktur geht nur noch über den Quotienten aus schwachen axialen und elektromagnetischen Matrixelementen in die Asymmetrie ein, sodaß nur eine schwache Kernmodell-Abhängigkeit besteht⁽³⁰⁾.

Aus diesen Gründen kann durch Vergleich der als Funktion der schwachen Parameter berechneten Asymmetrie mit experimentellen Ergebnissen eine relativ gesicherte Aussage über diese Parameter gemacht werden. Wegen der Verwendung der ersten Bornschen Näherung in Verbindung mit der Abschätzung der Coulomb-Distorsionseffekte für schwere Kerne stellen die quantitativen Ergebnisse eine Abschätzung dar. Sobald ein experimenteller Nachweis einer Asymmetrie bei der elastischen Elektron-Kernstreuung geglückt ist, sollte zur genauen

Bestimmung der schwachen Parameter eine exakte Phasenanalyse für den Streuprozess durchgeführt werden. Gleichzeitig kann ein realistischeres Kernmodell verwendet werden. Dies ändert jedoch nicht die qualitativen Ergebnisse, die sich folgendermaßen zusammenfassen lassen:

Die Nachweismöglichkeiten der Existenz der untersuchten Strom-Stromkopplung sind für alle Kerne gut. Für die Elektronen-Einfallenergie $E = 300 \text{ MeV}$ liegt der günstigste Meßbereich zwischen Streuwinkeln von 85° bis 145° .

Hier befinden sich für die Kerne mit $I \neq 0$ (bis auf ^{41}Ca) die Maximalwerte der Asymmetrie, sie liegen für die untersuchten Kerne im Standardmodell zwischen $2,26 \cdot 10^{-5}$ (^3H) und $1,34 \cdot 10^{-5}$ (^{41}Ca) (s. Tabelle VII), und sind damit um 1500% (400%) bis 600% (200%) größer als bei der Streuung am Proton (Neutron) beim gleichen Streuwinkel. Sie übersteigen auch die maximale, bei der Streuung an den Nukleonen erreichbare Asymmetrie noch um 1100% (200%) bis 700% (130%).

Berücksichtigt man noch die bei der Kernstreuung vorteilhafteren Übergangsraten, so liegen die Effekte damit deutlich im meßbaren Bereich.

Zur Untersuchung der Struktur ergeben sich die folgenden Möglichkeiten:

- Durch Streuung an Kernen mit Spin 0 im gesamten Winkelbereich oder an ^{209}Bi für Streuwinkel $\theta \leq 135^\circ$ kann die gleiche Kombination der schwachen Parameter bestimmt werden wie bei den atomphysikalischen Experimenten an $^{209}\text{Bi}^{(17)-(19)}$. Hier bietet sich eine Möglichkeit zur Überprüfung der widersprüchlichen Ergebnisse dieser Experimente.
- An Spin-0-Kernen mit $N = Z$ kann der isoskalare Anteil des schwachen neutralen Vektorformfaktors F_1^{Z0} bestimmt

werden. Dieses Ergebnis ist bereits in Ref.(29) enthalten.

- Durch magnetische Streuung an den Kernen ^3H und ^3He lassen sich in der Näherung, in der die magnetischen Momente dieser Kerne mit denen von p und n übereinstimmen, die gleichen Kombinationen der schwachen Parameter wie bei der Streuung am Nukleon bestimmen.

Durch die höheren Partialwellen bei den Kernen ^{41}Ca und ^{209}Bi wird der Beitrag der magnetischen Streuung zur Asymmetrie verstärkt. Hier bietet sich evtl. die Möglichkeit, die Kopplung zwischen dem leptonischen Vektor- und dem hadronischen Axialstrom zu bestimmen. Allerdings sind die experimentellen Schwierigkeiten wegen der geringen Zählraten in Rückwärtsstreuung beträchtlich.

- Wie schon aus der Untersuchung der Elektron-Nukleonstreuung (33) bekannt ist, reicht zur getrennten Bestimmung der schwachen Parameter ein einzelner experimenteller Wert für die Asymmetrie nicht aus, sondern es werden verschiedene Meßpunkte benötigt, an die die theoretischen Ergebnisse angepasst werden müssen. Dazu kann bei der Kernstreuung nicht nur der Streuwinkel variiert werden, sondern auch der N/Z -Wert des Targets bei festem Streuwinkel, was in bestimmten Fällen experimentell einfacher zu verwirklichen ist.

- Durch Berechnung der Asymmetrie mit den schwachen Parametern, die sich aus verschiedenen Eichmodellen ergeben, und Vergleich mit gemessenen Werten für verschiedene Streuwinkel oder verschiedene Targets können diese Modelle getestet werden.

In dem Bereich, in dem die Ladungsstreuung überwiegt,

kann so leicht eine Entscheidung zwischen Modellen getroffen werden, die entweder eine nicht verschwindende (Gruppe 1) oder eine verschwindende Kopplung zwischen leptonischem Axial- und hadronischem Vektorstrom (Gruppe 2) voraussagen. Auch zwischen den beiden untersuchten $SU(2) \times U(1)$ -Modellen^{(3a), (3b)} der ersten Gruppe kann leichter unterschieden werden als bei der Nukleonstreuung, da die Asymmetrie viel empfindlicher auf die Änderung des gesamten Parametersatzes als auf die Variation von $\sin^2 \theta_w$ innerhalb eines Modells reagiert.

ANHANG A : NORMIERUNG

Mit der Normierung des Kernzustandes

$$\langle P' | P \rangle = 2 P_0 \delta^3(\vec{P}' - \vec{P}) \quad (\text{A.1})$$

und des Elektronenzustandes

$$\langle p' | p \rangle = 2 p_0 \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \quad (\text{A.2})$$

ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Elektron-Kernstreuung im Laborsystem zu (41)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi^2}{4M} \frac{p'}{p} \frac{|\overline{T_{fi}}|^2}{p_0 + M - \frac{p'_0 p_0}{\sqrt{p'^2 - m_e^2}} \cos \theta} \quad (\text{A.3})$$

Für relativistische Elektronen ($m_e^2 \ll p_0^2$) folgt dann Gleichung (III.7).

Wegen (37)

$$\langle p' | p \rangle = \langle 0 | \{ a(p'), a^\dagger(p) \} | 0 \rangle \quad (\text{A.4})$$

($a(p')$ bzw. $a^\dagger(p)$ ist der Vernichtungs- bzw.

Erzeugungsoperator des Elektronenzustandes $|p'\rangle$ bzw. $|p\rangle$) folgt

$$\{ a(p'), a(p) \} = \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \quad (\text{A.5})$$

Damit sind die freien Diracspinoren der Elektronen normiert durch

$$u^\dagger(p', x') u(p, x) = 2 p_0 \delta_{x'x} \quad (\text{A.6})$$

Die Nukleonzustände werden normiert zu

$$\langle k'_j | k_j \rangle = \delta^3(\vec{k}'_j - \vec{k}_j) \quad , \quad j = 1 \dots A \quad (\text{A.7})$$

Analog zu (A.4) bis (A.6) folgt aus (A.7) für die freien Nukleonspinoren

$$u^+(k_j', \bar{b}_j) u(k_j, b_j) = \delta_{\bar{b}_j' b_j} \quad (\text{A.8})$$

und man erhält

$$u(k_j, b_j) = \sqrt{\frac{m_N + k_{j0}}{2k_{j0}}} \begin{pmatrix} \chi_{\vec{k}_j} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}_j}{m_N + k_{j0}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

mit den Paulispinoren $\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ANHANG B : FORMELN FÜR DIE VEKTORANTEILE DER REDUZIERTEN EINTEILCHEN-MULTIPOLMATRIXELEMENTE

Zur Berechnung der Kernmultipolmomente für die Kerne mit Spin $I \neq 0$ werden die reduzierten Einteilchenmatrixelemente der Multipoloperatoren $\hat{H}_{3H}$ und $\hat{T}_{3H}^{mag}$ benötigt (s. Abschnitt V.2). Diese sind für den Fall der elektromagnetischen Wechselwirkung in Ref. (50) aufgeführt und werden in diesem Anhang gemeinsam mit den Vektoranteilen der schwachen neutralen Matrixelemente angegeben. Man erhält die Vektoranteile der entsprechenden schwachen neutralen Matrixelemente aus den elektromagnetischen durch Ersetzen der elektromagnetischen Formfaktoren G_H^{γ} und F_2^{γ} durch die schwachen neutralen Vektorformfaktoren $G_V^{z^0}$ und $F_2^{z^0}$. Es gilt (50)

$$\langle n(\ell \frac{1}{2}) j \| \hat{H}_{3V}^{\{\frac{1}{2}^0\}}(x) \| n(\ell \frac{1}{2}) j \rangle = (-1)^{j+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \cdot 5 \cdot F_{4(i)}^{\{\frac{1}{2}^0\}} \cdot \left\{ \begin{matrix} \ell & j & \frac{1}{2} \\ j & \ell & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (n\ell | j_3(qx) | n\ell) \quad (B.1)$$

$$\begin{aligned} \langle n'(\ell' \frac{1}{2}) j' \| \hat{T}_{3V}^{mag \{\frac{1}{2}^0\}}(x) \| n(\ell \frac{1}{2}) j \rangle = & \frac{i}{m_N} \left\{ -F_{4(i)}^{\{\frac{1}{2}^0\}} \cdot \langle n(\ell \frac{1}{2}) j \| \vec{H}_{33} \cdot \vec{\nabla} \| n(\ell \frac{1}{2}) j \right. \\ & \left. + \mu_{V(i)}^{\{\frac{1}{2}^0\}} \cdot \frac{q}{2} \cdot \langle n(\ell \frac{1}{2}) j \| \left(-\sqrt{\frac{H}{2j+1}} \vec{H}_{33+1} + \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \vec{H}_{33-1} \right) \cdot \vec{e} \| n(\ell \frac{1}{2}) j \right\rangle \end{aligned} \quad (B.2)$$

wobei

$$S \equiv (2\ell+1)(2j+1) \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \quad (B.3)$$

$$\vec{H}_{33}^H(x) \equiv j_3(qx) Y_{33}^H(\varphi_n, \vartheta_n) \quad (B.4)$$

Die auf der rechten Seite von (B.2) auftretenden reduzierten Matrixelemente sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \langle u(l\frac{1}{2})j || \vec{H}_{2L} \cdot \vec{\nabla} || u(l\frac{1}{2})j \rangle &= (-1)^{l+j-\frac{1}{2}} \cdot S \sqrt{2l+1} \cdot \left\{ \begin{matrix} l & j & \frac{1}{2} \\ j & l & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \cdot \\
 &\cdot \left[\left\{ \begin{matrix} l+1 & l & l \\ l & l & l+1 \end{matrix} \right\} \frac{\begin{pmatrix} l & l & l+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} l+1 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \frac{l+1}{2l+1} (u_l | j_2 (\frac{d}{dx} - \frac{r}{r}) | u_l) + \right. \\
 &+ \left. \left\{ \begin{matrix} l+1 & l & l \\ l & l & l+1 \end{matrix} \right\} \frac{\begin{pmatrix} l & l & l-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} l-1 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \frac{l}{2l+1} (u_l | j_2 (\frac{d}{dx} + \frac{l+1}{r}) | u_l) \right] \quad (B.5) \\
 \langle u(l\frac{1}{2})j || \vec{H}_{2L} \cdot \vec{\nabla} || u(l\frac{1}{2})j \rangle &= (-1)^{l+j-\frac{1}{2}} S \sqrt{2l+1} \cdot \left\{ \begin{matrix} l & l & l \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} l & l & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (u_l | j_2 | u_l) \quad (B.6)
 \end{aligned}$$

Die Radialintegrale $(u_l | j_2 | u_l)$ sind definiert durch

$$(u_l | j_2 | u_l) = \int_0^\infty R_{ue}(x) j_2(qx) R_{ue}(x) x^2 dx \quad (B.7)$$

wobei $R_{nl}(x)$ die Radialanteile der Nukleonenzustände darstellen.

Zur Ableitung der Gleichungen (B.1) bis (B.7) werden noch keine Annahmen über die R_{ue} benötigt.

Speziell für harmonische Oszillatorfunktionen sind z.B.

in Ref. (30) analytische Ausdrücke für $(u_l | j_2 | u_l)$

gegeben. Die in (B.5) auftretenden Radialintegrale, die

Ableitungen enthalten, können durch eine Linearkombination

der einfachen Radialintegrale (B.7) ausgedrückt werden (30).

REFERENZEN

- (1) Eine Zusammenfassung der ladungsändernden schwachen Wechselwirkung ist z.B. enthalten in
 - (a) R.J. Blin-Stoyle: "Fundamental Interactions and the Nucleus", North Holland, Amsterdam, 1973
 - (b) E.D. Commins: "Weak Interactions", Mc Graw-Hill, New York, 1973
 - (c) R.E. Marshak, Riazuddin, C.P. Ryan: "Theory of Weak Interactions in Particle Physics", Wiley, New York, 1969
- (2) Übersichtsartikel über Eichtheorien sind z.B.
 - E.S. Abers, B.W. Lee: Phys. Rep. 9C (1973) 1
 - M.Böhm, H. Joos: Herbstschule für Hochenergiephysik, Maria Laach 1977 (DESY 78/27, 1978)
 - Spezielle Modelle siehe Ref. (3) bis (5)
- (3) Beispiele für auf der $SU(2) \times U(1)$ Gruppenstruktur aufgebaute Eichmodelle sind enthalten in
 - (a) S. Weinberg: Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1264
--: ibid. 27 (1971) 1688
--: Phys. Rev. D5 (1972) 1412
A. Salam, J.C. Ward: Phys. Lett. 13 (1964) 168
--: "Elementary Particle Theory", Almqvist & Wiksell, Stockholm 1968
 - (b) S.L. Glashow, S. Weinberg: Phys. Rev. D15 (1977) 1958
 - (c) A. De Rújula, H. Georgi, S.L. Glashow: Harvard Report HUTP-77/A046 (1977)
 - (d) R.M. Barnett: Phys. Rev. Lett. 34 (1975) 41
--: Phys. Rev. D11 (1975) 3246
--: ibid. D13 (1976) 671

- P. Fayet: Nucl. Phys. B78 (1974) 14
- A. De Rújula, H. Georgi, S.L. Glashow, H.R. Quinn:
Rev. Mod. Phys. 46 (1974) 391
- M.A.B. Bég, A. Zee: Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 675
- F.A. Wilcek, A. Zee, L. Kingsley, S.B. Treiman:
Phys. Rev. D12 (1975) 2768
- H. Fritzsch, P. Minkowski: Caltech Report CALT-68-503 (1975)
- (4) Ein Beispiel für ein $SU(3)_C \times U(1)$ -Eichmodell ist
B.W. Lee, S. Weinberg: Phys. Rev. Lett. 38 (1977) 1237
- (5) Beispiele für $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ -Eichmodelle sind
gegeben in
J. Pati, A. Salam: Phys. Rev. D10 (1974) 275
R.N. Mohapatra, D.P. Sidhu: Phys. Rev. Lett. 38 (1977) 667
- (6) F.J. Hasert et al.: Phys. Lett. 46B (1973) 138
- (7) A. Benvenuti et al.: Phys. Rev. Lett. 32 (1974) 800
- (8) B. Aubert et al.: Phys. Rev. Lett. 32 (1974) 1457
- (9) S. Barish et al.: Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 448
- (10) D. Cline et al.: Phys. Rev. Lett. 37 (1976) 252, 648
- (11) P.C. Huang, J.J. Sakurai: Phys. Lett. 63B (1976) 295
--: ibid. 72B (1977) 208
P.C. Huang: Phys. Lett. 69B (1977) 216
- (12) P. Musset: Proceedings of the International Symposium
on Lepton and Photon Interactions at High Energies, F.
Gutbrod ed., DESY, Hamburg 1977
- (13) R.M. Barnett: Proceedings of the European Conference
on Particle Physics, Budapest 1977
- (14) S. Gurr, F. Reines, H.W. Sobel: Phys. Rev. Lett. 28 (1972) 1
- (15) F.J. Hasert et al.: Phys. Lett. 46B (1973) 121

- (16) A.M. Cnobs et al.: Phys. Rev. Lett. 41 (1978) 357
- (17) L.L. Lewis et al.: Phys. Rev. Lett. 39 (1977) 795
- (18) P.E.G. Baird et al.: Phys. Rev. Lett. 39 (1977) 798
- (19) L.M. Barkov, M.S. Zolotorev: Pis'ma Zh.Eskp. Teor. Fiz. 27 (1978) 379
- (20) C.Y. Prescott et al.: Phys. Lett. 77B (1978) 347
- (21) M.J. Harris, C.E. Loving, P.G.H. Sandars: J. Phys. B11 (1978) 749
- (22) E. Ma: Phys. Rev. D18 (1978) 961
- (23) E.M. Henley, L. Wilets: Phys. Rev. A14 (1976) 1411
- (24) Brimicombe, C.E. Loving, P.G.H. Sandars: J. Phys. B9 (1976) L237
- (25) F.Scheck: Phys. Rep. 44 (1978) 187
- (26) G. Feinberg: Columbia University Reprint Nr. C00-2232B-43
- (27) L.M. Simons: "Interaction Studies in Nuclei", North Holland, Amsterdam, 1975
- (28) J. Missimer, L.M. Simons: to be published in Nucl. Phys. A
- (29) G. Feinberg: Phys. Rev. D12 (1975) 3575
- (30) T.W. Donnelly, J.D. Walecka: Ann. Rev. Nucl. Sci. 25 (1975)
- (31) Siehe z.B.
 E. Fischbach, D. Tadic: Phys. Rep. 6C (1973) 124
 M. Gari: Phys. Lett. 6B (1973) 318
 --: Invited paper presented at the Symposium on
 Interaction Studies in Nuclei, Mainz, 1975, RUB TB II/115
 B. Jenschke: Diss. 1972, KfK Nr. 1739
- (32) M. Porrmann, M.Gari: Phys. Rev. Lett. 38 (1977) 947
- (33) E. Reya, K. Schilcher: Phys. Rev. D10 (1974) 952
- (34) E.W. Otten: Proposal Univ. Mainz, presented at the
 Topical Meeting on Experiments in Intermediate Energy
 Physics, Zuo, 1976

- (35) J.D. Bjorken, S.D. Drell: "Relativistische Quantenmechanik", BI, Mannheim, 1964
- (36) R.M. Barnett: Phys. Rev. D14 (1976) 2990
- (37) S. Gasiorowicz: "Elementary Particle Physics", Wiley, New York, 1967
- (38) N.C. Mukhopadhyay: Phys. Rep. 30C (1977) 1
- (39) D.H. Perkins: Proceedings of the 16th International Conference on High Energy Physics, NAL, 1972
P. Musset: Proceedings of the 2nd International Conference on Elementary Particles, Aix-en-Provence, 1973
- (40) E. Hoffmann, E. Reya: Preprint Nr. MZ-TH 78/5, Mainz, 1978
- (41) H.D. Dahmen: Herbstschule für Hochenergiephysik, Maria Laach, 1974
- (42) R. Hofstadter: Rev. Mod. Phys. 28 (1956) 214
- (43) Siehe z.B.
D.R. Yennie, R.N. Wilson, D.G. Ravenhall: Phys. Rev. 92 (1953) 1325
--: ibid. 95 (1954) 500
- (44) Siehe z.B.
M.L. Goldberger, K.M. Watson: "Collision Theory", Wiley, New York, 1964
- (45) E. Corinaledi, F. Strocchi: "Relativistic Wave Mechanics", North-Holland, Amsterdam, 1963
- (46) G. Grawert: "Quantenmechanik", Vieweg, Braunschweig, 1969
- (47) J.M. Blatt, V.W. Weisskopf: "Theoretical Nuclear Physics", Wiley, New York, 1952
- (48) Siehe z.B.
J.D. Jackson: "Classical Electrodynamics", Wiley, New York, 1967

- (49) A.R. Edmonds: "Drehimpulse in der Quantenmechanik", BI, Mannheim, 1964
- (50) F. De Forest, J.D. Walecka: Adv. in Phys. 15 (1966) 1
- (51) J.D. Walecka: Nucl. Phys. A285 (1977) 349
- (52) A. De Shalit, I. Talmi: "Nuclear Shell Theory", Academic Press, New York, 1963
- (53) J.P. Elliot, T.H.R. Skyrme: Proc. Roy. Soc. A232 (1955) 561
- (54) C.J. Tassie, F.C. Barker: Phys. Rev. 111 (1958) 940
- (55) J.S. Mc Carthy et al.: Phys. Rev. Lett. 25 (1970) 884
- (56) H.R. Collard et al.: Phys. Rev. B138 (1965) 57
- (57) M. Croissiaux et al.: Phys. Rev. B137 (1965) 865
- (58) G.C. L1, I. Sick, J.D. Walecka, G.E. Walker: Phys. Lett. 32B (1970) 317
- (59) R. Blankenbecler: Amer. J. Phys. 25 (1957) 25
- (60) H. Überall: "Electron Scattering from Complex Nuclei", Academic Press, New York, 1971
- (61) H.R. Collard, R. Hofstadter in Landolt-Börnstein, ed., Band 2: "Kernradien", Springer-Verlag, Berlin, 1967
- (62) G.F. Chew, G.C. Wick: Phys. Rev. 85 (1952) 636
J. Ashkin, G.C. Wick: ibid. 686
- (63) "Handbook of Chemistry and Physics", CRC Press, Cleveland, 1976
- (64) Z.G. Pinsker: "Electron Diffraction", Butterworth, London, 1953
- (65) J.L. Friar, J.W. Negele: Nucl. Phys. A212 (1973) 93
- (66) I. Sick: Nucl. Phys. A218 (1974) 509
- (67) R.C. Barnett: Rep. Prog. Phys. 37 (1974) 1
- (68) M. Bernheim et al.: Lett. Nuovo Cim. 5 (1972) 5

- (69) T.A. Griffy, D.U.L. Yu: Phys. Rev. 139 (1965) 880
- (70) T.W. Donnelly, J.D. Walecka: Nucl. Phys. A209 (1972) 81
- (71) J. Goldemberg, Y. Torizuka: Phys. Rev. 129 (1963) 312
- (72) Nach Beendigung dieser Arbeit wurde eine Untersuchung der Paritätsverletzungen bei der Elektron-Kernstreuung veröffentlicht:

B.D. Serot: Stanford Univ. Preprint ITP-615, 10/78

In diesem Preprint werden für elastische Streuung an ^{12}C die Effekte der Paritätsmischungen in den Kernzuständen mit denjenigen des Interferenzterms aus schwacher neutraler und elektromagnetischer Streuamplitude verglichen. Es zeigt sich, daß die ersteren tatsächlich vernachlässigbar klein sind.

VERZEICHNIS DER ABBILDUNGEN

Fig. 1: Asymmetrie im Standardmodell mit $\sin^2 \theta_w = 0,3$ als Funktion des Streuwinkels für den Kern ${}^3\text{H}$ und die Elektronenenergie $E = 300 \text{ MeV}$.

—— Gesamtasymmetrie $\tilde{A}$ (IV.43)
 --- Beitrag der Ladungsstreuung $\tilde{A}^M$ (definiert in (IV.44))
 Beitrag der magnetischen Streuung $\tilde{A}^{\tilde{M}}$ (definiert in (IV.45))

Fig. 2 -4: Wie Fig. 1, aber für die Kerne ${}^3\text{He}$, ${}^{41}\text{Ca}$, ${}^{209}\text{Bi}$.

Fig. 5-7: Gesamtasymmetrie für ${}^{12}\text{C}$, ${}^{40}\text{Ca}$, ${}^{208}\text{Pb}$; sonst wie Fig. 1

Fig. 8: Gesamtasymmetrie für ${}^3\text{H}$ und Proton; sonst wie Fig. 1
 —— ${}^3\text{H}$
 Proton

Fig. 9: Wie Fig. 8, aber für ${}^3\text{He}$ und Neutron.

Fig. 10: Statistisch relevante Größe $\tilde{A}^2 \frac{d\tilde{A}}{d\Omega}$ als Funktion des Streuwinkels. Modell und Parameter wie bei Fig. 1. Der Pfeil kennzeichnet den Nulldurchgang der Asymmetrie $\tilde{A}$.

Fig. 11-16: Wie Fig. 10, aber für die Kerne ${}^3\text{He}$, ${}^{41}\text{Ca}$, ${}^{209}\text{Bi}$, ${}^{12}\text{C}$, ${}^{40}\text{Ca}$, ${}^{208}\text{Pb}$. Die nicht mit Pfeilen versehenen Nullstellen entsprechen den Diffraktionsminima in der ersten Bornschen Näherung von $\frac{d\tilde{A}}{d\Omega}$.

Fig. 17: Gesamtasymmetrie für ^3H für die fünf $\text{SU}(2)\times\text{U}(1)$ -Eichmodelle, die in Tabelle IX (Seite 95) aufgeführt sind. Mit der dortigen Normierung entspricht

—— Modell 1 (Standardmodell)

--- Modell 2

..... Modell 3

— · — Modell 4

— · · — Modell 5

Parameter wie in Fig. 1.

Fig. 18-20: Wie Fig. 17, aber für die Kerne ^3He , ^{41}Ca , ^{209}Bi .

Fig. 21-23: Gesamtasymmetrie für ^{12}C , ^{40}Ca , ^{208}Pb für die Modelle 1 und 2; sonst wie Fig. 17.

Fig. 24,25: Gesamtasymmetrie im Standardmodell für ^{209}Bi , ^{208}Pb für drei verschiedene Weinbergwinkel ($E = 300 \text{ MeV}$)

Es entspricht

—— $\sin^2 = 0,3$

--- $\sin^2 = 0,25$

..... $\sin^2 = 0,4$

Fig. 26: Gesamtasymmetrie für den Streuwinkel $\theta = 70^\circ$ als Funktion der Neutronenzahl zur Protonenzahl des Targets für die Eichmodelle 1 und 2. Die eingezeichneten Punkte entsprechen den Kernen ^{12}C , ^{208}Pb und ^{209}Bi ; sonst wie Fig. 21

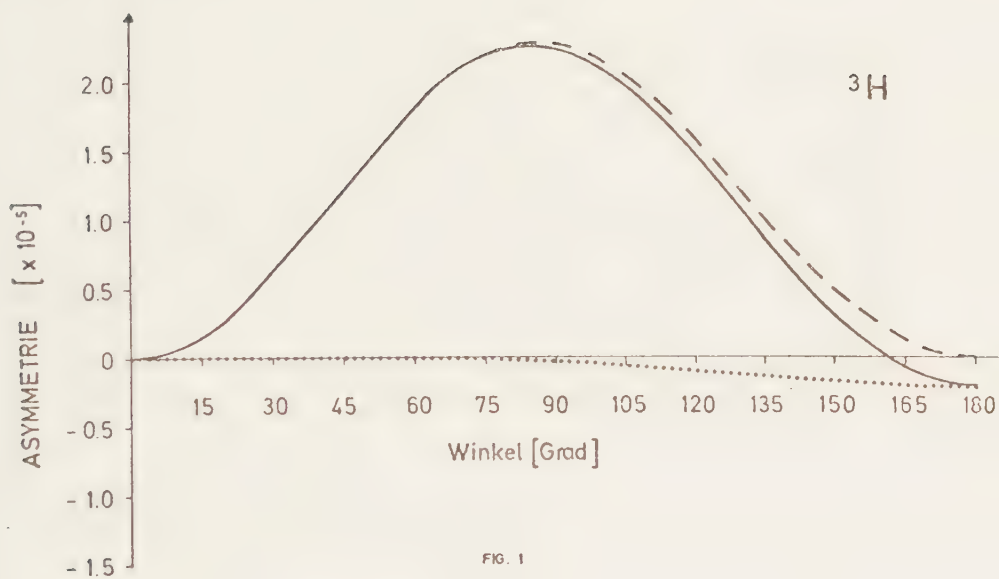


FIG. 1

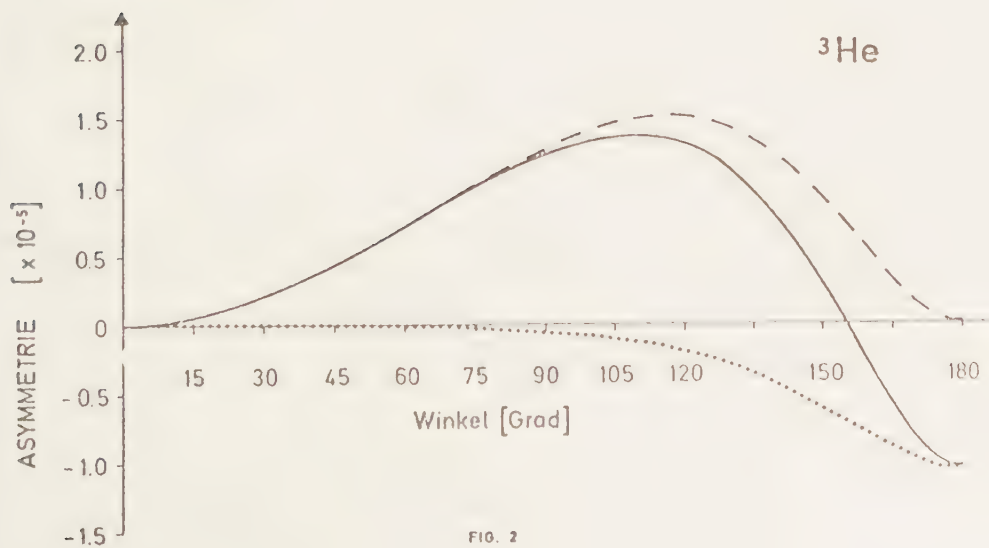
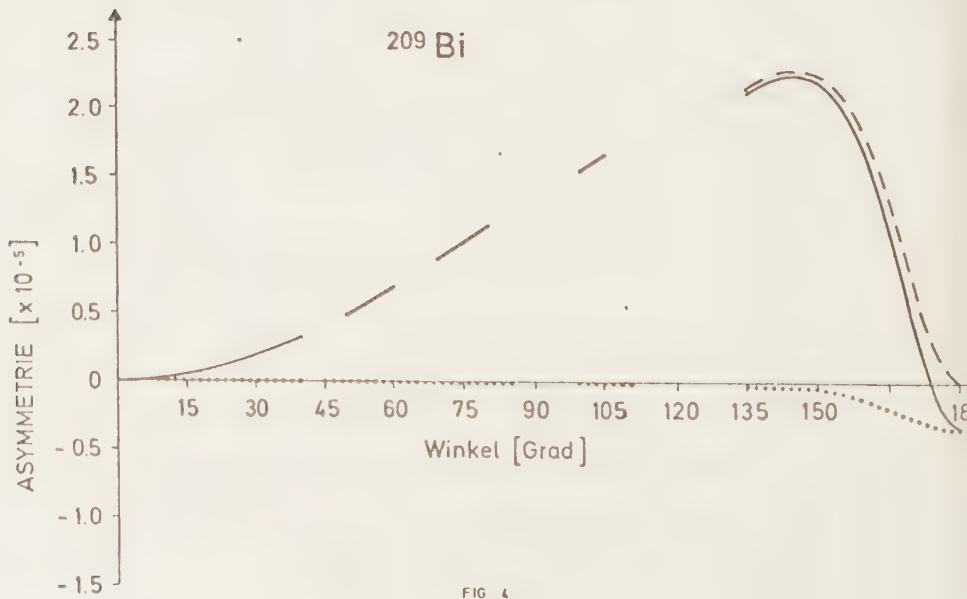
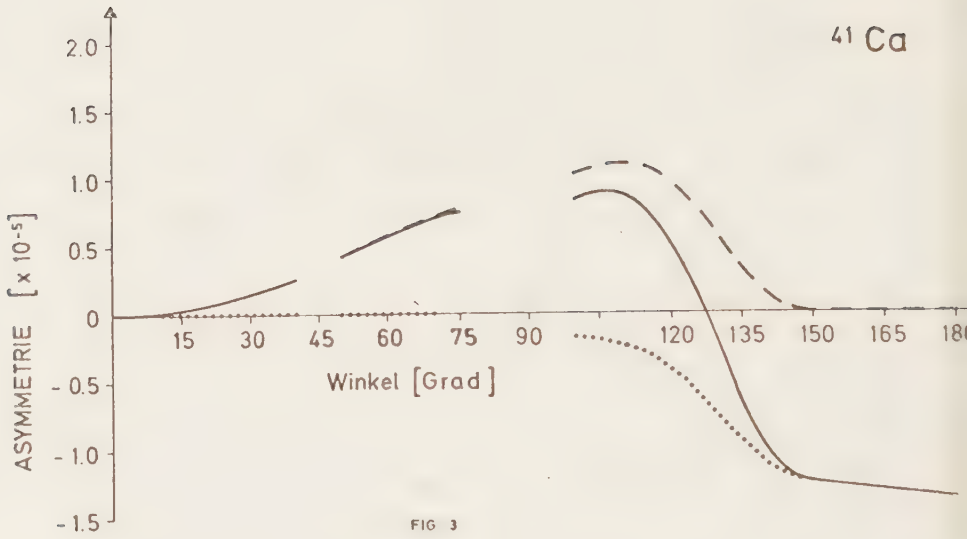


FIG. 2



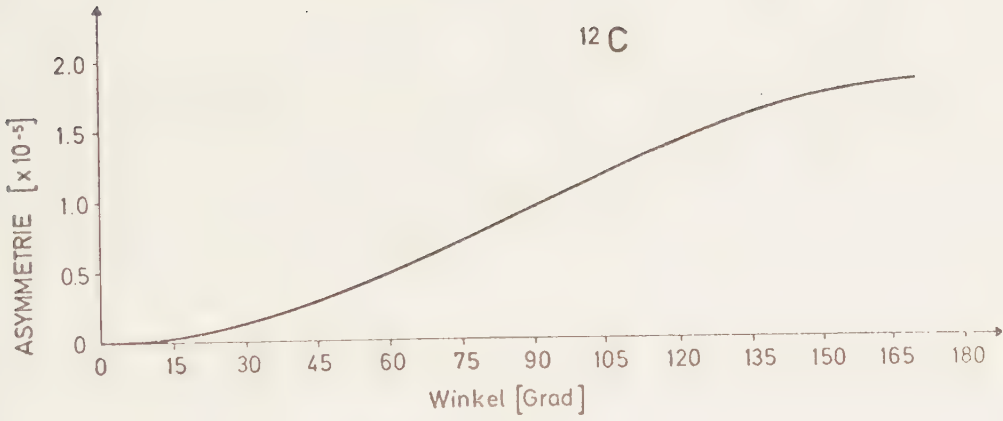


FIG 5

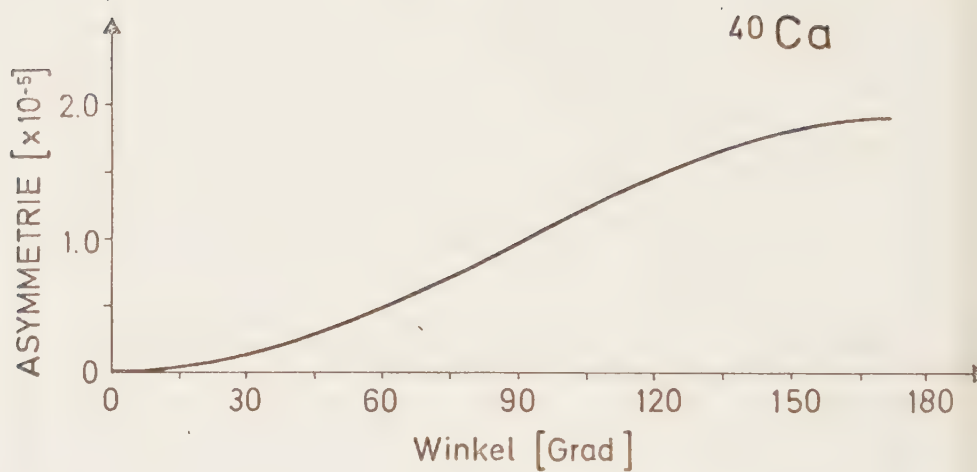


FIG. 6

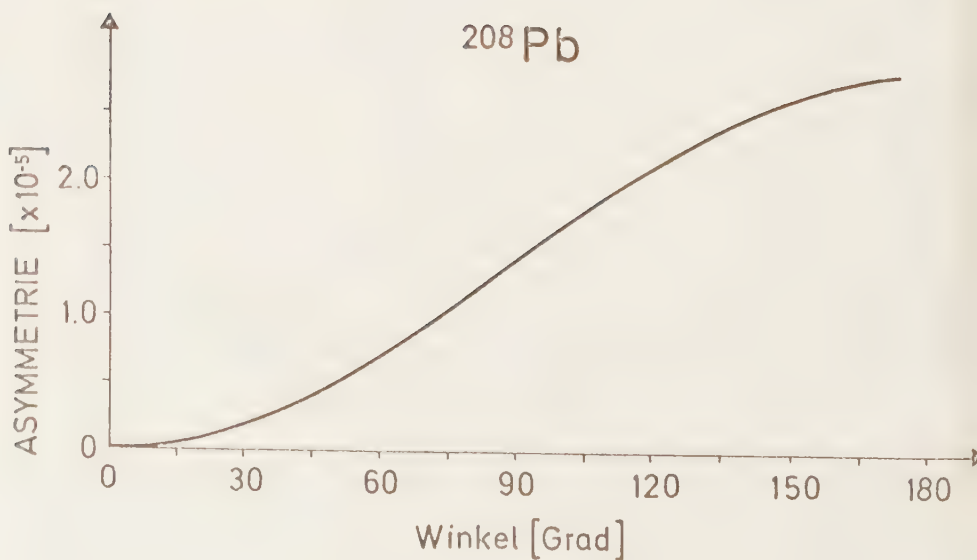


FIG. 7

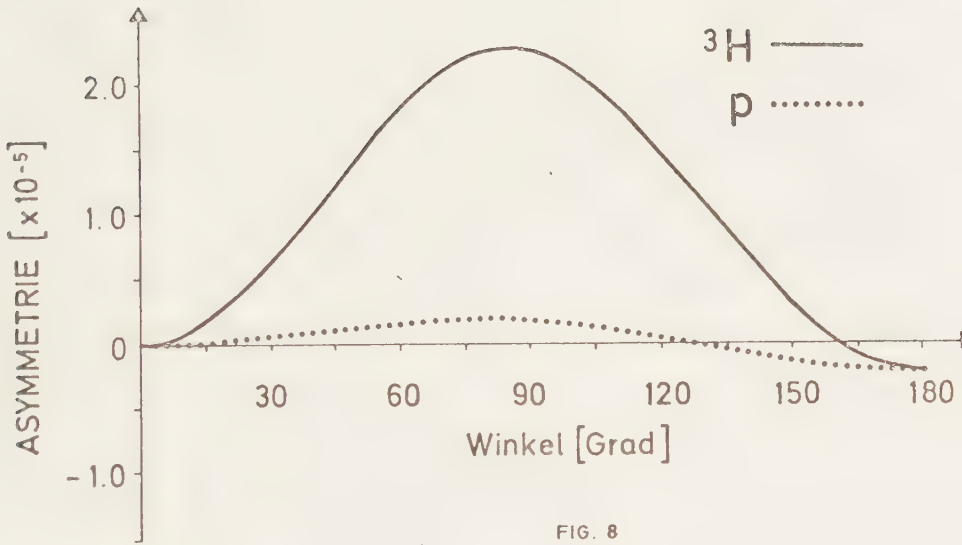


FIG. 8

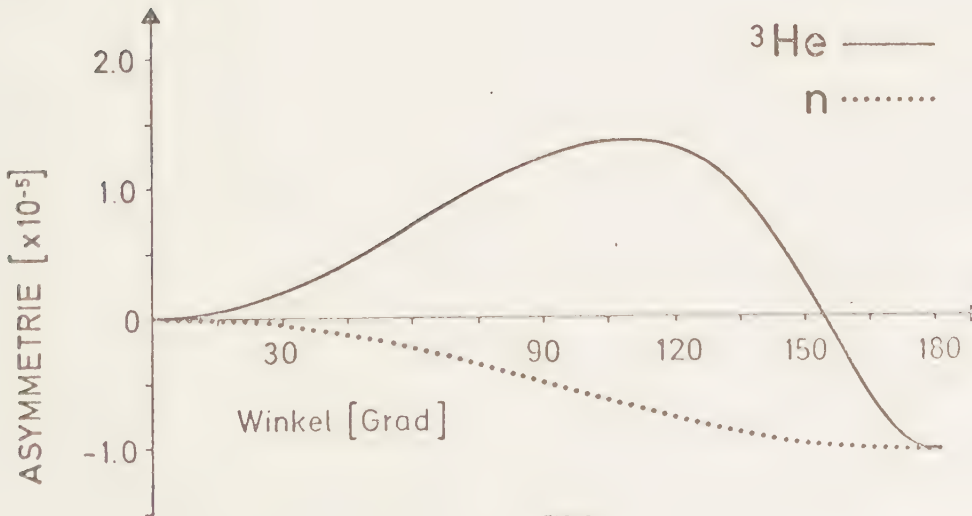


FIG 9

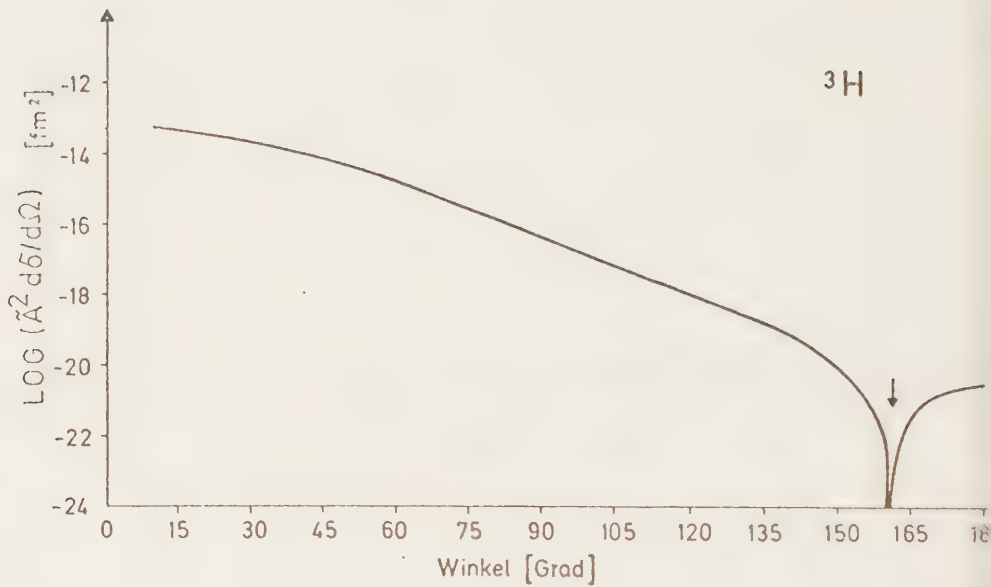


FIG. 10

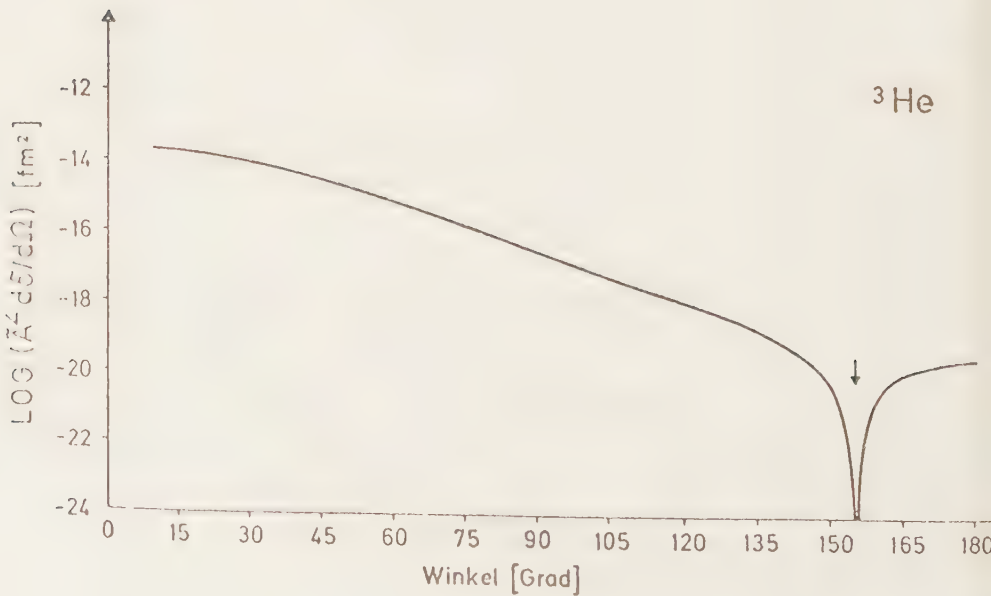
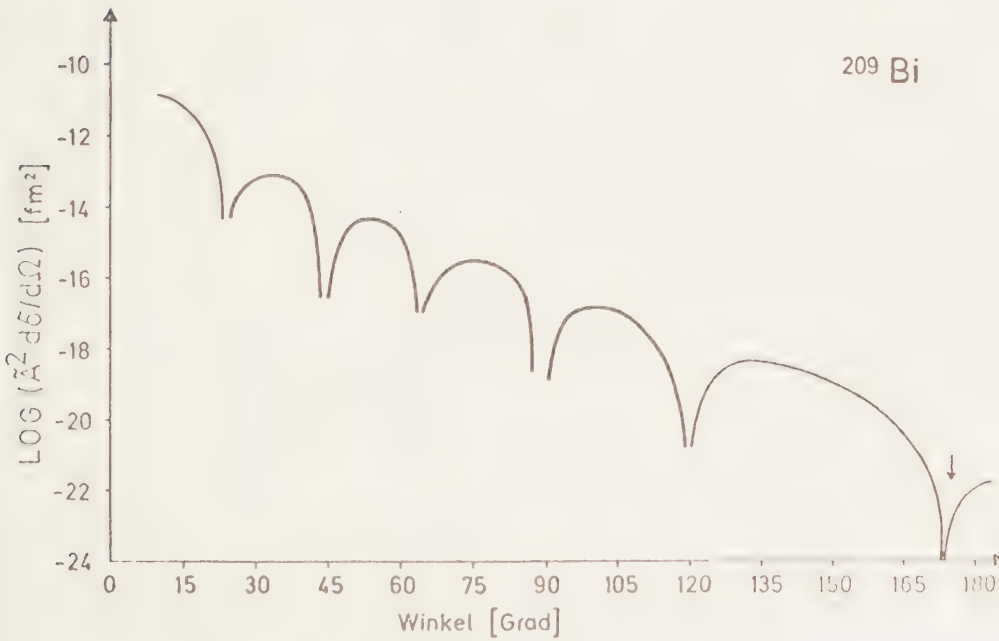
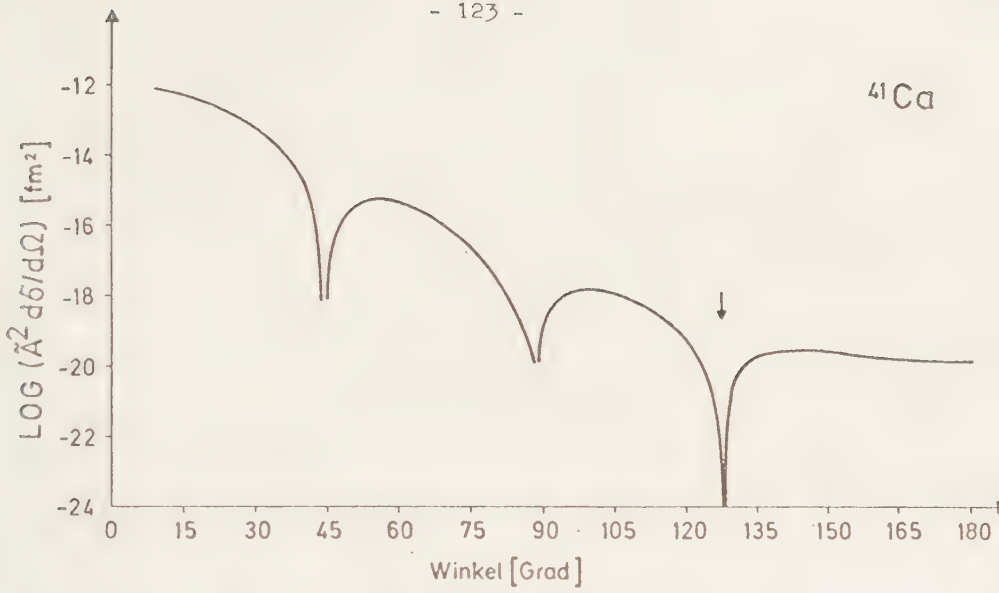


FIG. 11



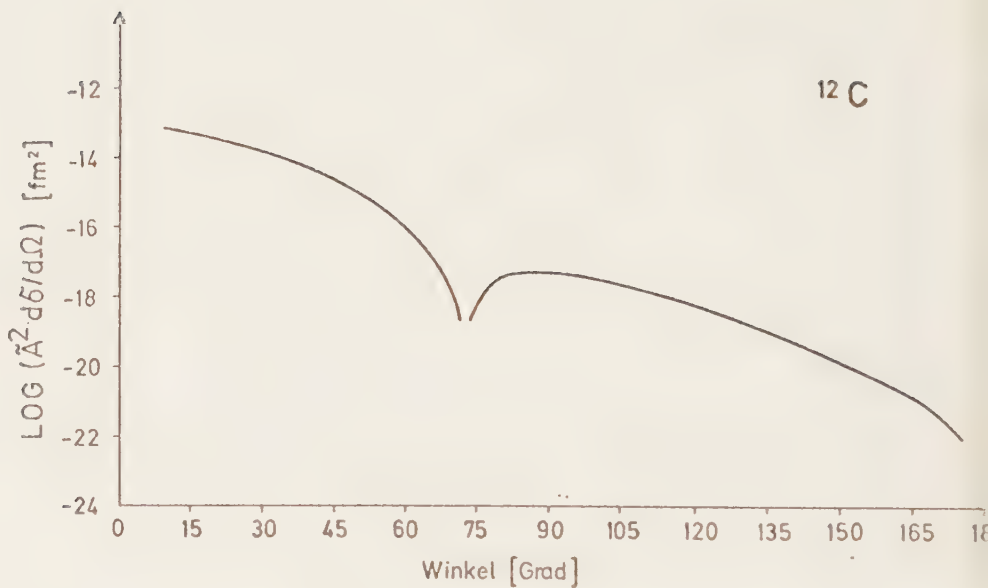


FIG. 14

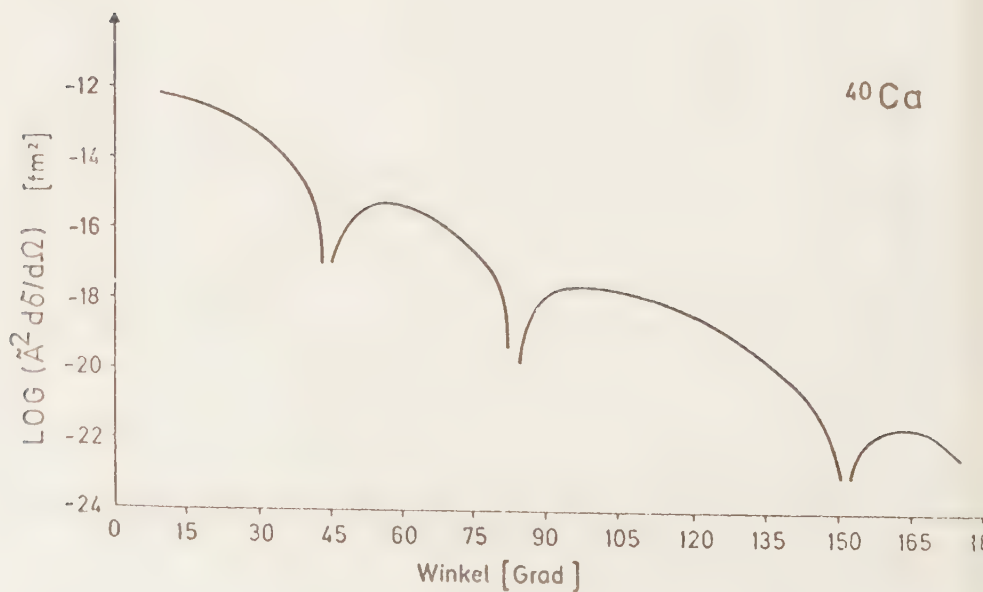


FIG. 15

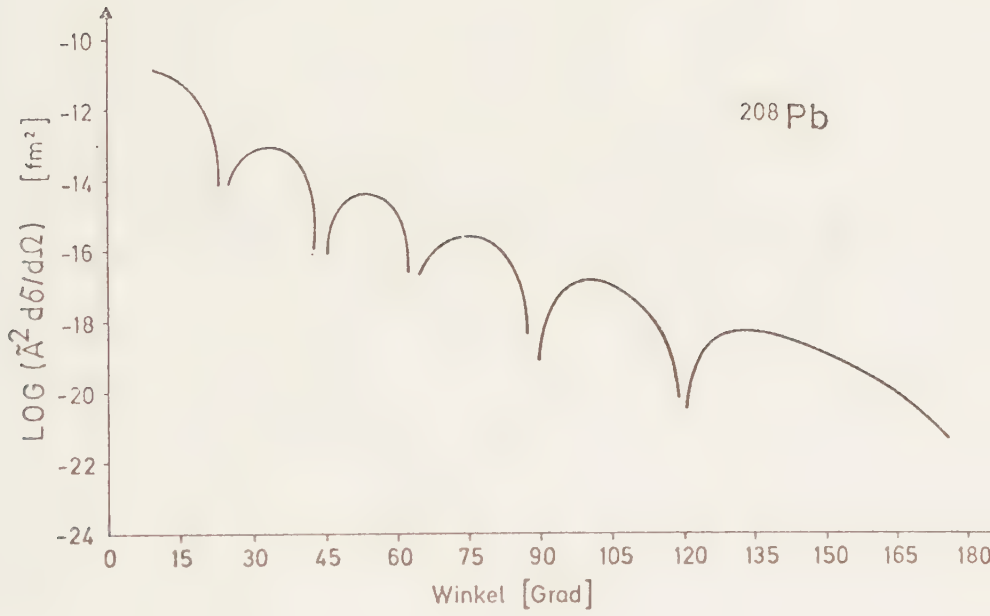
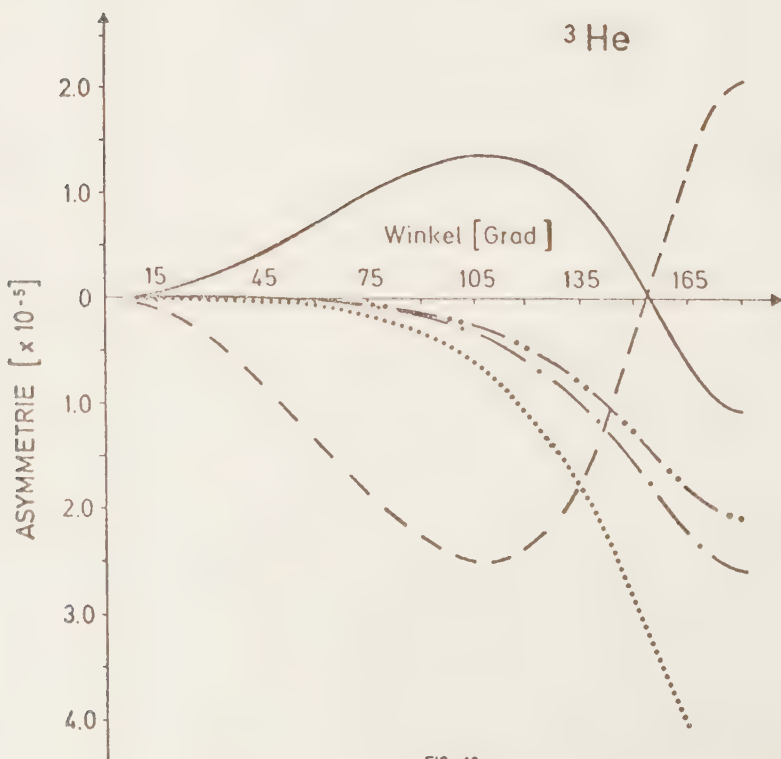
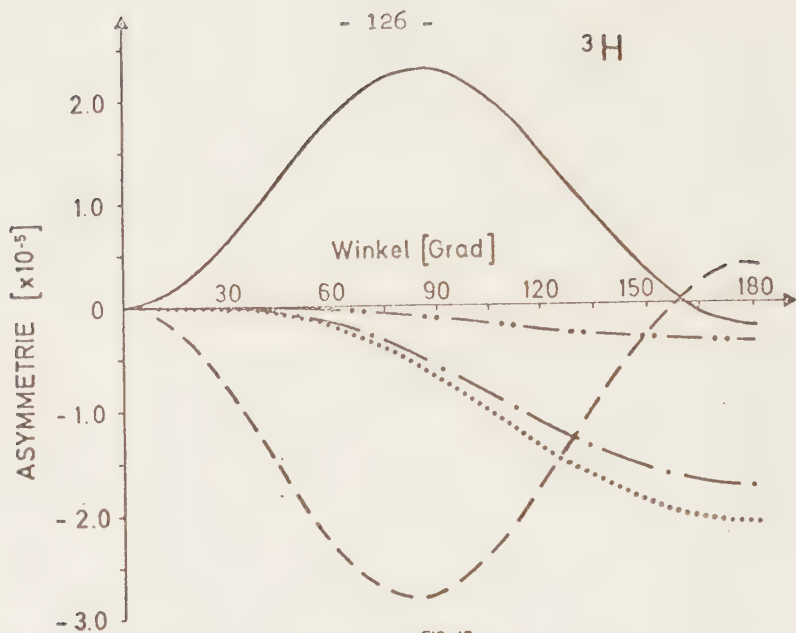
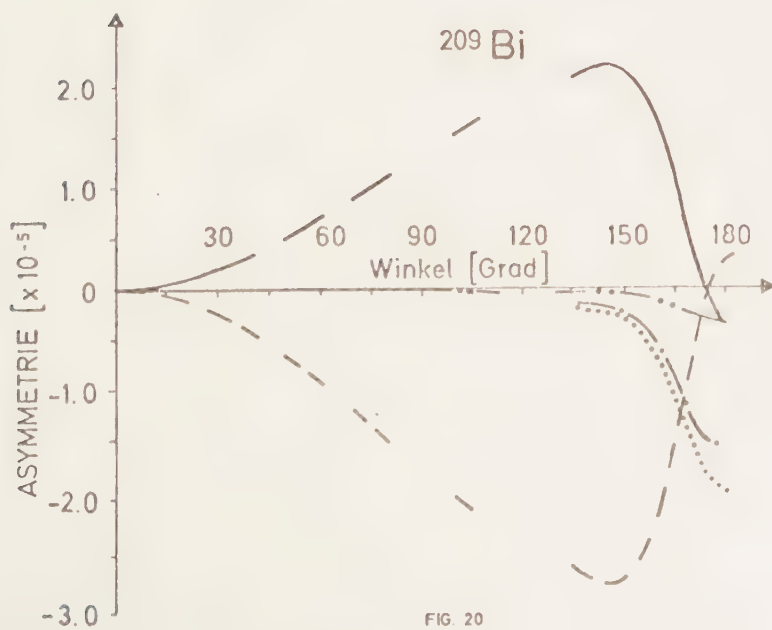
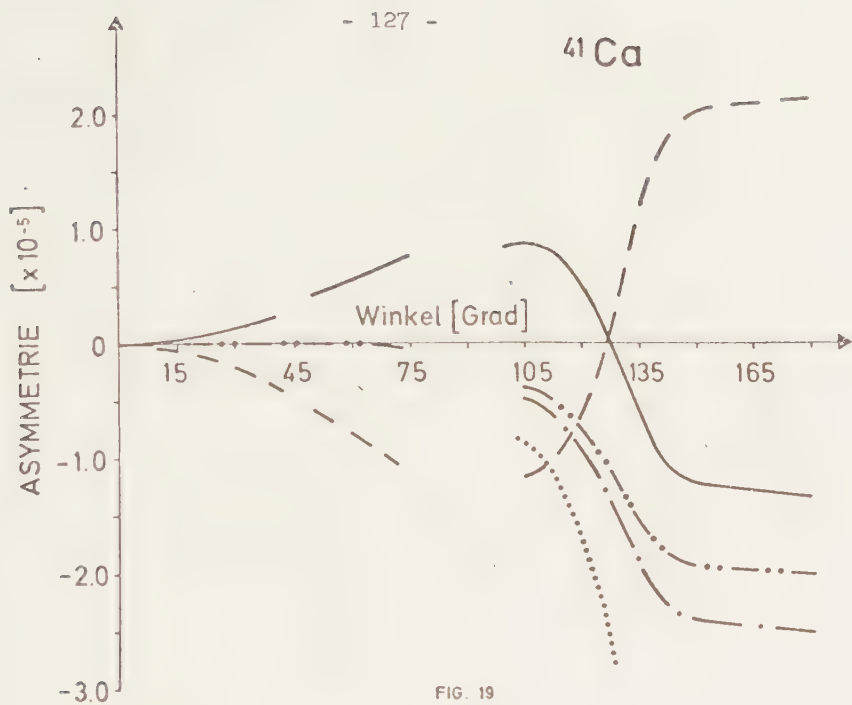


FIG. 16





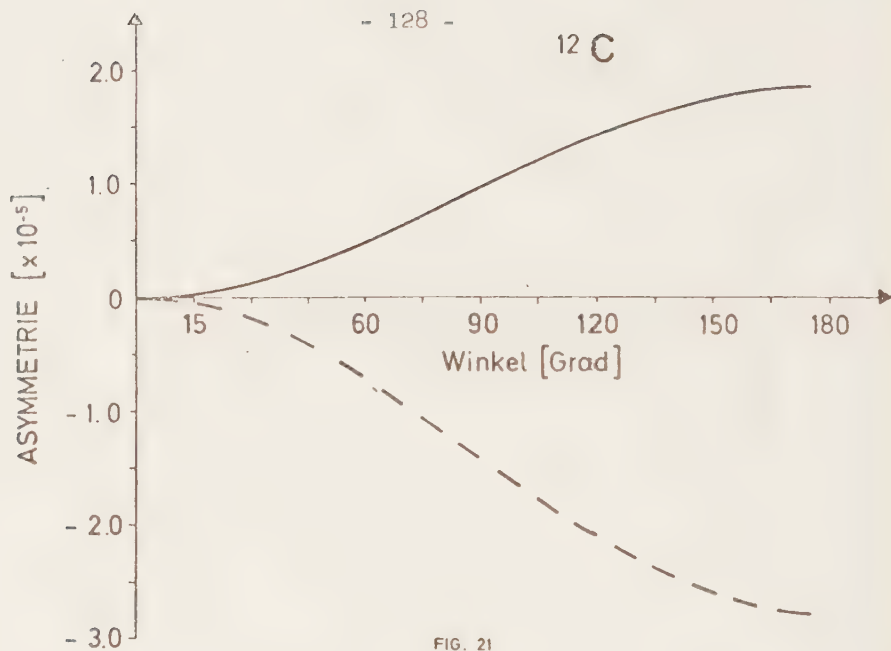


FIG. 21

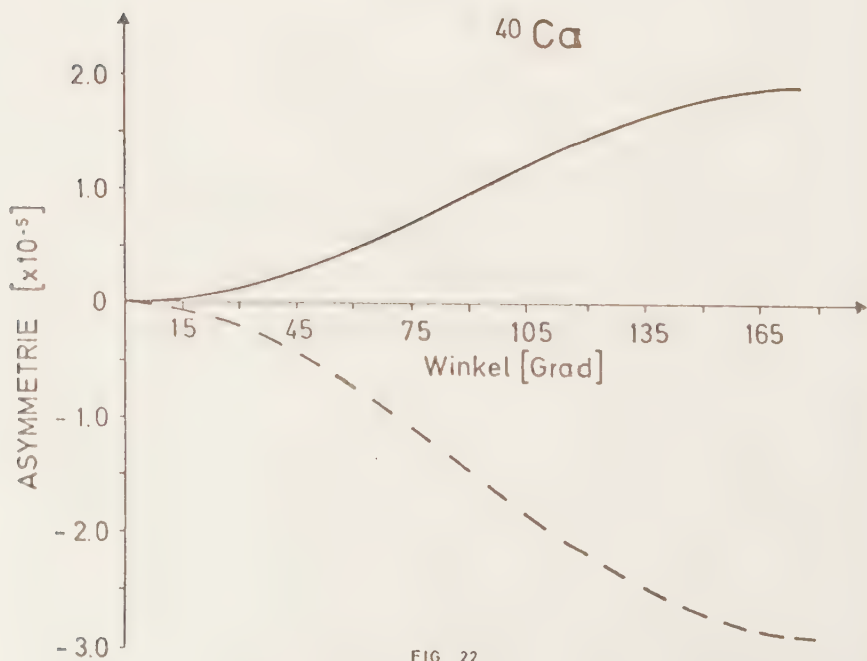


FIG. 22

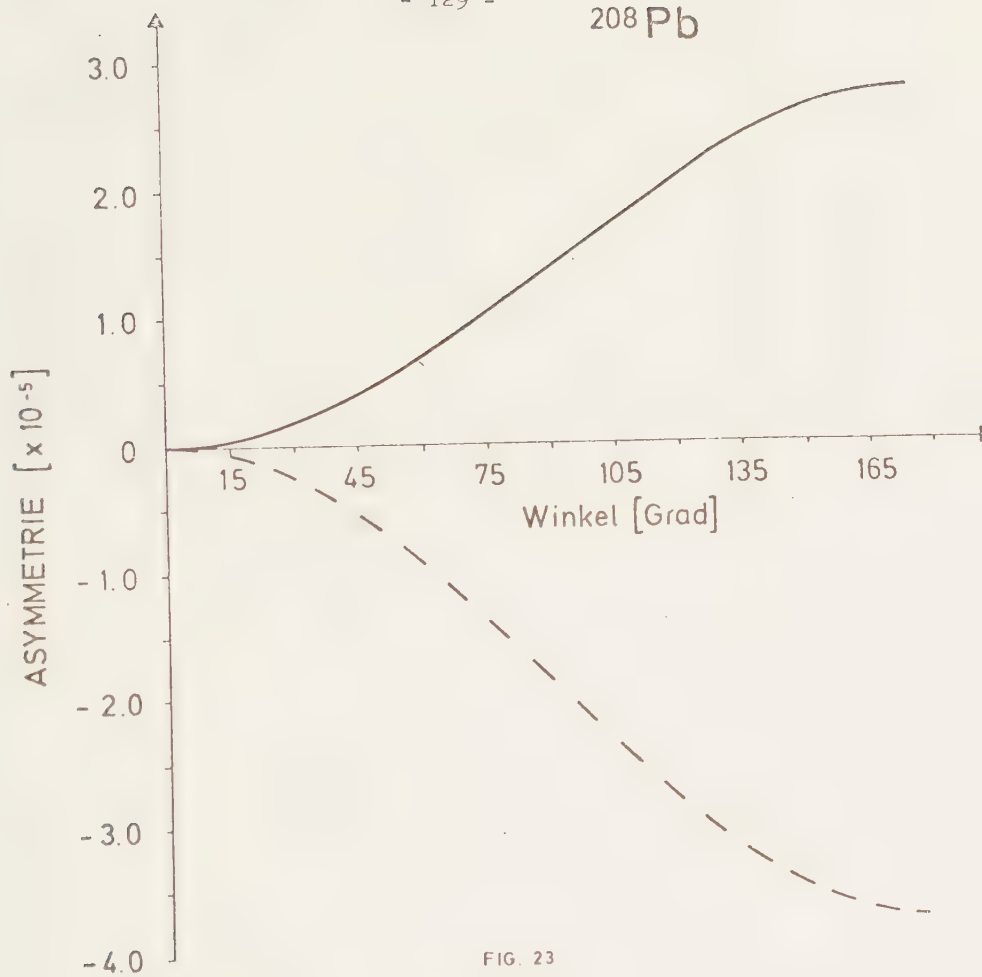
^{208}Pb 

FIG. 23

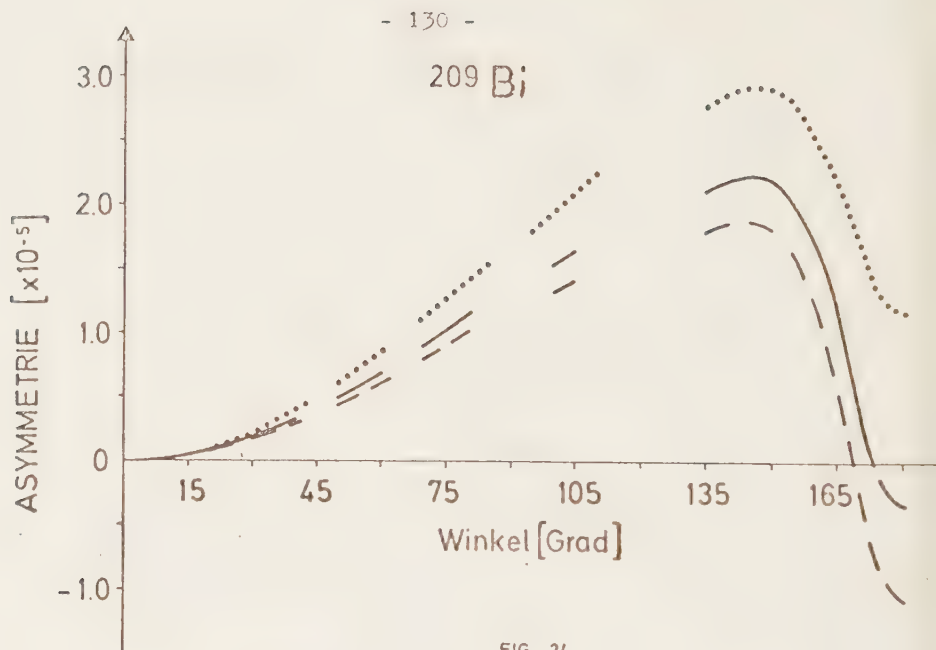


FIG. 24

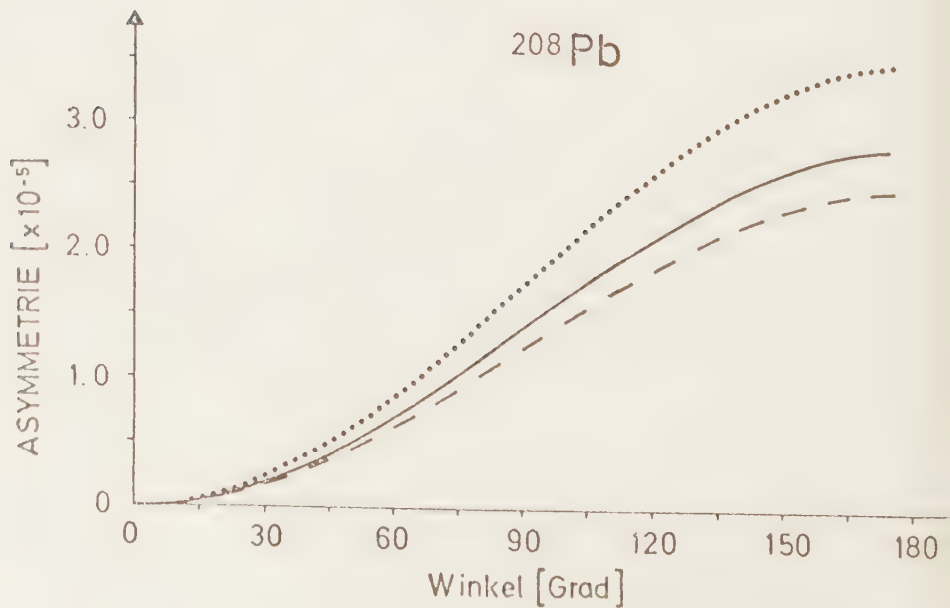
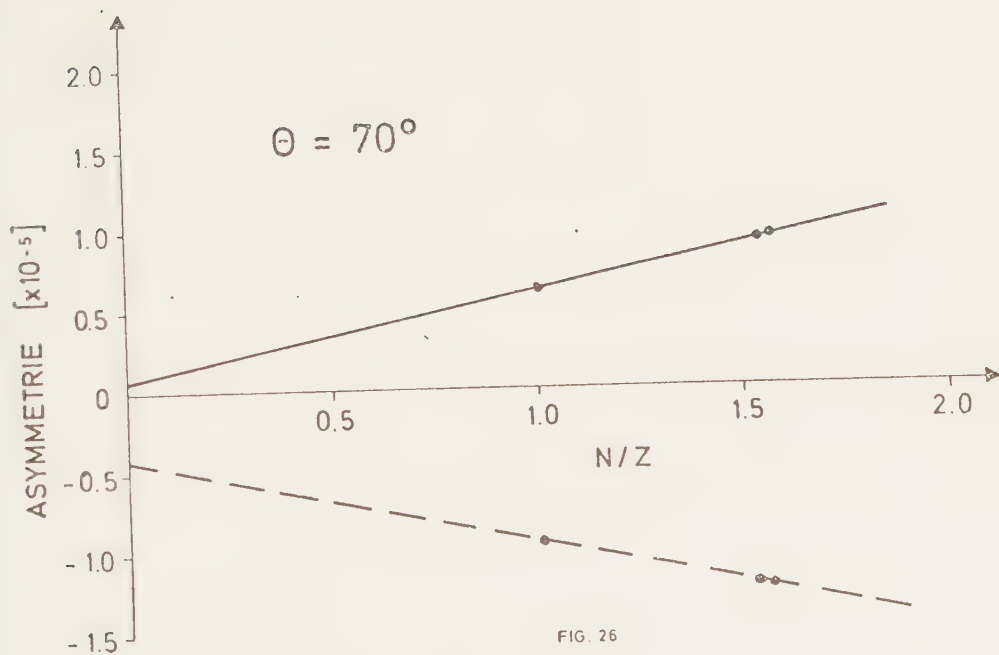


FIG. 25



LEBENS LAUF

Marion Fischer-Waetzmann

- 25.2.1949 geb. in Stuttgart
- 1955-1959 Besuch der Grundschule in Stuttgart
- 1959-1967 Besuch des Gymnasiums Königin-Katharina-Stift
in Stuttgart und des Humboldt-Gymnasiums in
Bad Homburg v.d.H.
- 1967 Reifeprüfung am Humboldt-Gymnasium in Bad
Homburg v.d.H.
- 1967 Beginn des Studiums der Physik an der Johannes
Gutenberg-Universität in Mainz
- 1969 Diplom-Vorprüfung in Physik
- 1973 Diplomprüfung in Physik
- 1974-1977 Aufenthalt in Teheran und CERN / Genf
- ab 1977 Bearbeitung des Dissertationsthemas in Mainz

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. F. Scheck
für viele wertvolle Anregungen bei der Durchführung
dieser Arbeit danken.

Herrn Prof. Dr. E. O. Alt danke ich für fruchtbare
Diskussionen.

